Über Funktionen,

welche gewissen Differenzengleichungen n. Ordnung Genüge leisten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Fakultät zu Kiel

vorgelegt von

Ernst Weinnoldt

aus Kiel.

Kiel.

Verlag von Lipsius & Tischer.

1885.

Imprimatur:
Dr. Alb. Stimming,
z. Z. Decan.

Über Funktionen,

welche gewissen Differenzengleichungen n. Ordnung Genüge leisten.

Einleitung.

In Crelle's Journal Bd. 34, pag. 285 hat *Heine* die von ihm in die Analysis eingeführte und nach ihm benannte Reihe ausführlich abgehandelt und als Integral einer Differenzengleichung 2. Ordnung erkannt, die ähnlich aufgebaut ist, wie die Differentialgleichung 2. Ordnung, welcher die hypergeometrische Reihe genügt. Dieselbe Reihe und die zu ihr gehörige Differenzengleichung hat Herr *Thomae* in Cr. J. Bd. 70, pag. 258 betrachtet, und zwar aus ähnlichen Gesichtspunkten, wie es *Riemann* mit der verwandten Reihe gethan hat, indem es ihm gelang, ein System von Eigenschaften, welches die zu Grunde liegende Funktion völlig definirte, aufzustellen.

Im Folgenden soll in analoger Weise eine Funktion untersucht werden, die durch ein aufgestelltes System von Eigenschaften, welche sich auf ihre Unstetigkeiten und ihre Periodicität beziehen, völlig definirt und als allgemeines Integral einer Differenzengleichung n. Ordnung erkannt wird. Die gefundene Differenzengleichung hat eine Gestalt, die derjenigen der Differentialgleichung, welche Herr *Pochhammer* im Cr. J. Bd. 71, pag. 305 und das. Bd. 73, pag. 1 bearbeitet hat, ganz analog ist. Es gelingt nun durch Integration der Differenzengleichung durch bestimmte Summen die verschiedenen Zweige und Darstellungselemente der Funktion darzustellen und für dieselben auch convergente Potenzreihen zu entwickeln. Aus den bestimmten Summen lassen sich aber auch die Beziehungen, welche zwischen den verschiedenen Zweigen bestehen, ableiten.

Durch die hierbei angestellten Betrachtungen wird man auf eine Funktion geführt, die der bis dahin behandelten ähnlich ist. Sie wird in analoger Weise definirt und ebenfalls als Integral einer Differenzengleichung n. Ordnung erkannt. Es gelingt aber nicht, alle Zweige der Funktion in geschlossener Form darzustellen. Nur im Falle $n = 2$ wird die Funktion erschöpfend discutirt.

Die Operation $\varphi(qx) - \varphi(x)$ soll mit $\Delta\varphi(x)$, die Operation $\frac{\varphi(qx) - \varphi(x)}{x(q-1)}$ mit $\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$ bezeichnet werden. Da jeder der neuen Ausdrücke derselben Behandlung unterworfen werden kann, so ergiebt sich:

$$\Delta\left[\Delta\varphi(x)\right] = \Delta^2\varphi(x) = \varphi(q^2 x) - 2\varphi(qx) + \varphi(x)$$

$$\frac{\Delta\left[\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\right]}{\Delta x} = \frac{\Delta^2\varphi(x)}{\Delta x^2} = \frac{\varphi(q^2 x) - (q+1)\varphi(qx) + q\varphi(x)}{q x^2 (q-1)^2}.$$

und allgemein:

$$\Delta^n\varphi(x) = C_{n,n}\varphi(q^n x) + C_{n,n-1}\varphi(q^{n-1}x) + \ldots + C_{n,\nu}\varphi(q^\nu x) + \ldots C_{n,0}\varphi(x),$$

$$\frac{\Delta^n\varphi(x)}{\Delta x^n} = \sum_0^n{}_\nu \frac{C^1_{n,\nu}\varphi(q^\nu x)}{x^n (q-1)^n q^{\Sigma n-1}},$$

wo:

$$C_{n,\nu} = (-1)^{n-\nu}\frac{n(n-1)\dots(\nu+1)}{1.2\dots.(n-\nu)}.$$

$$C'_{n,\nu} = C'_{n-1,\nu-1} - q^{n-1}C'_{n-1,\nu}.$$

$$C'_{n,n} = 1. \quad C'_{n,o} = (-1)^n q^{\Sigma(n-1)},$$

also:

$$C'_{n,\nu} = (-1)^{n-\nu}\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots.(q-1)}{(q^\nu-1)(q^{\nu-1}-1)\dots(q-1)(\frac{1}{q}-1)\dots(\frac{1}{q^{n-\nu}}-1)}\,q^{\nu-n}$$

ist.

Es werden als k Funktionen die Lösungen der Differenzengleichung

$$\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = o\,;\ \text{oder}\ \varphi(qx) - \varphi(x) = o$$

bezeichnet. Herr *Thomae* hat für sie die Symbole k, $k(x)$ eingeführt. (Cr. J. Bd. 70.) Diese Grössen haben in der Theorie der Differenzengleichungen dieselbe Bedeutung, wie in der Differentialrechnung die Constanten, wie z. B. in dem Satze: zwischen je $n+1$ Integralen einer linearen homogenen Differenzengleichung n. Ordnung besteht stets eine lineare homogene Relation mit k Funktionen als Coefficienten.

Es soll neben dem Summenzeichen Σ noch das Zeichen S mit Angabe der Summationsgrenzen gebraucht werden, und es soll definirt werden durch die Gleichung:

$$2)\quad \underset{x}{\overset{xq^n}{S}} f(x)\,\Delta\frac{lg\,x}{lg\,q} = \underset{x}{\overset{xq^n}{S}} f(x)\frac{\Delta x}{x(q-1)} = \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, f(xq^\nu).$$

Über die Funktionen $p(\alpha, q, x)$ und $\pi(\alpha, q, x)$, welche im Folgenden häufig benutzt werden und welche dort eine ähnliche Rolle spielen wie die Potenz eines Binom's in der Differentialrechnung, ist ausführlich berichtet worden von *Jacobi*, Crelle J. Bd. 32 und von Herrn *Thomae*, Crelle's J. Bd. 70. Es sollen hier daher nur die Formeln zusammengestellt werden, welche in der Folge angewandt sind.

$p(\alpha, q, x)$ und $\pi(\alpha, q, x)$ erfüllen beide die Differenzengleichung (resp. Recursionsformel):

$$3)\quad \left\{ \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta(x)} = -\frac{q^\alpha-1}{q-1}\,\frac{\varphi(x)}{1-x}.\ \text{od.}\ \Delta\varphi(x) = -\frac{x(q^\alpha-1)}{1-x}\,\varphi(x)\right.$$

resp.

$$\varphi(qx) = \frac{1-q^\alpha x}{1-x}\,\varphi(x).$$

Ferner ist:

$$4)\quad \begin{cases} p(\alpha, q, x) = \lim\limits_{n=\infty}(1-xq^n)^\alpha \prod\limits_{0}^{n-1}{}_{\mu}\left(\dfrac{1-xq^\mu}{1-xq^{\alpha+\mu}}\right), \\[2ex] \pi(\alpha, q, x) = (-x)^\alpha \lim\limits_{n=\infty}(1-\frac{1}{x}q^n)^\alpha \prod\limits_{0}^{n-1}{}_{\mu}\left(\dfrac{1-\frac{1}{x}q^{-\alpha+\mu+1}}{1-\frac{1}{x}q^{\mu+1}}\right). \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} p(\alpha, q, x) = (-x)^\alpha p\left(\alpha, \dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{x}\right). \\[2ex] \pi(\alpha, q, x) = (-xq^{1-\alpha})^\alpha\,\pi\left(\alpha, \dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{x}\right). \\[2ex] \pi(\alpha, q, x) = (-x)^\alpha\,p\left(\alpha, q, \dfrac{1}{x\,q^{\alpha-1}}\right). \quad q < 1. \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} p(\alpha, q, q) = (1-q)^{\alpha}\, \Pi(\alpha, q)\,. \\ \Pi(\alpha, q) = \Pi(\alpha, \tfrac{1}{q})\,. \\ \dfrac{1-q^{\alpha}}{1-q}\, \Pi(\alpha-1, q) = \Pi(\alpha, q)\,. \quad \text{f. d. F.} \quad q < 1. \end{cases}$$

$$7)\quad \left.\begin{cases} p(\alpha, q, x)\, p(\beta, q, x q^{\alpha}) = p(\alpha+\beta, q, x)\,. \\ p(\alpha, q, x) = \dfrac{1}{p(-\alpha, q, x q^{+\alpha})}\,. \end{cases}\right\} q < 1.$$

$$8)\quad \begin{cases} \sigma(\alpha, q, x) = \dfrac{\pi(\alpha, q, x)}{p(\alpha, q, x)} = (-1)^{\alpha} \dfrac{\Theta_{\prime\prime}\left(\frac{1}{2} lg(x q^{\alpha})\right)}{\Theta_{\prime\prime}\left(\frac{1}{2} lg(x)\right)}\, e^{\alpha\, lg\, x \sqrt{q}}\,. \\ q^{-\alpha(\alpha-1)}\, p(\alpha, \tfrac{1}{q}, x) = p(\alpha, q, x q^{1-\alpha})\, \sigma(\alpha, q, x q^{1-\alpha})\,. \quad q < 1. \end{cases}$$

9) Die k Funktion:

$$q^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}\, \sigma(\alpha, q, x)$$

und der Ausdruck:

$$\frac{q^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}(-1)^{\alpha}}{\Pi(\alpha-1, q)\, \Pi(-\alpha, q)} = \frac{(-1)^{\alpha+1}\, 2\, \Theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha \log q}{2}\right)}{(1-q)\, \Theta'_{\prime\prime}(o)}\, q^{\frac{\alpha^2}{2}}$$

bleiben ungeändert, wenn α in $\alpha+1$ übergeht*). Aus der für $q < 1$ geltenden Reihenentwickelung

$$10)\quad p(\alpha, q, x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, (x q^{\alpha})^{n}\, \frac{(1-q^{-\alpha})(1-q^{-\alpha+1}) \ldots (1-q^{-\alpha+n-1})}{(1-q)(1-q^{2}) \ldots (1-q^{n})}$$

ergeben sich nach den Formeln 4 und 5 ähnliche, wenn $q > 1$ für p, und ähnliche für $\pi(\alpha, q, x)$.

Für $q < 1$ ist:

$$11)\quad \overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}}\, s^{\lambda}\, p(\mu, s q)\, \Delta s = -\frac{\Pi(\mu, q)\, \Pi(\lambda, q)}{\Pi(\mu+\lambda+1, q)}\,.$$

12) Die Punkte, in denen die Funktion $p(\alpha, q, x)$ unendlich gross wird, sollen als die Punktfolge α, die Punkte, in denen die Funktion $\pi(\alpha, q, x)$ verschwindet, sollen als die α conjugirte Punktfolge bezeichnet werden. Die Nullpunkte von $\sigma(\alpha, q, x)$ dagegen sollen die complete Punktfolge α heissen. Diese Bezeichnungen sind denen analog gebildet, welche Herr *Thomae* im Cr. J. Bd. 84 in seiner Abhandlung: Über die Funktionen, welche durch Reihen von der Form dargestellt werden

$$1 + \frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''} + \frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{q''}\frac{p''+1}{q''+1} + \ldots\ldots - ,$$

angewendet hat.

---

*) Cr. J. 70. p. 261.

I. Abschnitt.

Art. 1.

Die Funktion:

$$H_n \left(b \begin{matrix} b_1 \; b_2 \dots b_{n-1} \\ \alpha_1 \; \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \end{matrix} \lambda, q, x\right)$$

soll durch folgende Eigenschaften definirt werden.

1. Sie verzweigt sich als Funktion der complexen Variabeln x nur für $x = o$ und für $x = \infty$.

2. Zwischen je $n + 1$ Zweigen der Funktion H_n findet stets eine homogene lineare Beziehung mit k Funktionen als Coefficienten statt.

3. Die Funktion H_n lässt sich in die Formen setzen:

$$\begin{array}{ll} k_{10} \, H_n^{10} + k_{20} \, H_n^{20} + \dots & + k_{n-1,0} \, H_n^{n-1,0} + k_{n0} \, H_n^{n0} \\ k_{1\infty} \, H_n^{1\infty} + k_{2\infty} \, H_n^{2\infty} + \dots & + k_{n-1\infty} \, H_n^{n-1,\infty} + k_{n\infty} \, H_n^{n\infty} \\ k_{\alpha_1} \, H_n^{\alpha_1} + k_{\alpha_2} \, H_n^{\alpha_2} + \dots & + k_{\alpha_{n-1}} \, H_n^{\alpha_{n-1}} + k_{n\alpha} \, H_n^{\alpha} \\ k_{b_1} \, H_n^{b_1} + k_{b_2} \, H_n^{b_2} + \dots & + k_{b_{n-1}} \, H_n^{b_{n-1}} + k_{n_b} \, H_n^{b}. \end{array}$$

Hierin sind $k_{\nu_0}\, k_{\nu\infty}\, k_{\alpha_\nu}\, k_{n\alpha}\, k_{b_\nu}\, k_{n_b}$ k Funktionen.

$$H_n^{10}, H_n^{20}, \dots \qquad H_n^{n-1,0}, H_n^{n,0} x^{1-b-\lambda}$$

sind durchaus einändrig und für $x = o$ von o und ∞ verschieden.

Ferner sollen:

$$H_n^{1\infty} x^{1-\lambda}, H_n^{2\infty} x^{1-\lambda} \dots \qquad H_n^{n-1,\infty} x^{1-\lambda}, H_n^{n\infty} x^{\sigma}$$

wo $\sigma = n - b - b_1 - b_2 \dots - b_n - \lambda$ ist, durchaus einändrig und für $x = \infty$ von o und ∞ verschieden sein.

$H_n^{\alpha_\nu}$ werden in den Punkten $q^{-\alpha_\nu} q^{-\alpha_\nu - 1} \dots q^{-\alpha_\nu - m}$ $(\lim m = \infty)$ unendlich gross von der 1. Ordnung und bleiben ausser für $x = o$ und $x = \infty$ überall eindeutig und endlich.

H_n^{α} bleibt ausser für $x = o$ und $x = \infty$ überall eindeutig und endlich.

$H_n^{b_\nu}$ werden in der Punktfolge $q^{b_\nu + \lambda - \alpha_\nu - 1}$ unendlich klein von der 1. Ordnung und in den Punktfolgen $q^{-\alpha_1}, q^{-\alpha_2}, \dots q^{-\alpha_{n-1}}$ unendlich gross von der 1. Ordnung; H_n^{b} wird ebenfalls unendlich gross von der 1. Ordnung in den Punktfolgen $q^{-\alpha_1} q^{-\alpha_2} \dots q^{-\alpha_{n-1}}$. Im Übrigen bleiben die Funktionen $H_n^{b_\nu}$, H_n^{b} ausser für $x = o$ und $x = \infty$ endlich und eindeutig.

4. In den Ausdrücken:

$$\begin{array}{ll} (C_{10}^{\nu} \, H_n^{10} + C_{20}^{\nu} \, H_n^{20} + \dots & C_{n-1,0}^{\nu} \, H_n^{n-1,0}) \, x^{-\nu} \\ (C_{1\infty}^{\nu} \, H_n^{1\infty} + C_{2\infty}^{\nu} \, H_n^{2\infty} + \dots & C_{n-1,\infty}^{\nu} \, H_n^{n-1,\infty}) \, x^{1-\lambda+\nu} \end{array}$$

$\nu = 0\, 1 \,..\, n-2$, lassen sich die Constanten C_{μ_0}, $C_{\mu\infty}$ so bestimmen, dass sich diese Ausdrücke für $x = 0$, resp. $x = \infty$ von 0 und ∞ verschiedenen Werten nähern. Für $H_n^{10}, H_n^{20} \ldots H_n^{n-1,0}$ .. können stets solche Ausdrücke:

$$C_{10}^{\nu} H_n^{10} + C_{20}^{\nu} H_n^{20} + \ldots + C_{n-1,0}^{\nu} H_n^{n-1,0}$$

gesetzt werden, deren Determinante

$$\begin{vmatrix} C_{10} & C_{20} \,.\, C_{\nu_0} \,..\, & C_{n-1,0} \\ C_{10}^{1} & C_{20}^{1} & C_{n-1,0}^{1} \\ — & — \;\; — & — \\ C_{10}^{\nu} & C_{20}^{\nu} & C_{n-1,0}^{\nu} \\ — & — \;\; — & — \\ C_{n-1,0}^{n-2} & C_{n-1,0}^{n-2} & C_{n-1,0}^{n-2} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, und man kann daher dafür solche Ausdrücke wählen, dass

$$H_n^{10},\, H_n^{20} x^{-1},\, H_n^{30} x^{-2}, \ldots H_n^{n-1,0} x^{2-n}$$

für $x = 0$ von 0 und ∞ verschieden sind.*)

Ebenso können:

$$H_n^{1\infty} x^{1-\lambda},\, H_n^{2\infty} x^{2-\lambda}, \ldots H_n^{n-1,\infty} x^{n-\lambda-1}$$

so bestimmt werden, dass sie für $x = \infty$ von 0 und ∞ verschiedene Werte annehmen.

5. In Betreff der Indices $b \begin{smallmatrix} b_1 & b_2 & & b_{n-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & .. & \alpha_{n-1} \end{smallmatrix} \lambda$ wird vorausgesetzt, dass keine der Grössen: $b + \lambda - 1$, $b + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}$, $b_\nu + \lambda - 1$, $\alpha_\nu \pm \alpha_\mu$, $b_\nu \pm b_\mu$ von der Form $m + n \frac{2\pi i}{lg\, q}$ sei, wenn m und n beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind.

Hieraus ergeben sich sofort einige Folgerungen:

6. Eine H_n Funktion verliert ihren Character als solche nicht, wenn sie mit einem k Factor multiplicirt wird.

7. In einer H_n Funktion können die Grössen $b_1 - \alpha_1 \ldots b_{n-1} - \alpha_{n-1}$ unter einander, und die Indicespaare $b_1\, \alpha_1, b_2\, \alpha_2, \ldots b_{n-1}\, \alpha_{n-1}$, beliebig unter einander vertauscht werden.

8. Es ist:

$$H_n\left(b \begin{smallmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \end{smallmatrix} \lambda, q, x\right)$$

$$= x^{\lambda - 1} H_n\left(\sigma \begin{smallmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \end{smallmatrix} \lambda, \frac{1}{q}, \frac{1}{x}\right).$$

Es ist daher für die Folge nur notwendig, den Fall $q < 1$ zu betrachten.

Es fragt sich nun, ob eine Funktion, welche die Eigenschaften 1—5 hat, wirklich existirt, und in wie weit sie durch diese Eigenschaften bestimmt ist.

---

*) *J. Thomae:* Über eine Funktion, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung 4. Ordnung Genüge leistet. Halle a/S. 1875.

Art. 2.

Bezeichnen $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$ ganze Zahlen, so wollen wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} H_n^{10}\left(x\,q^{m_n}\right) & H_n^{20}\left(x\,q^{m_n}\right) & \ldots & H_n^{n0}\left(x\,q^{m_n}\right) \\ H_n^{10}\left(x\,q^{m_n-1}\right) & H_n^{20}\left(x\,q^{m_n-1}\right) & \ldots & H_n^{n0}\left(x\,q^{m_n-1}\right) \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ H_n^{10}\left(x\,q^{m_1}\right) & H_n^{20}\left(x\,q^{m_1}\right) & \ldots & H_n^{n0}\left(x\,q^{m_1}\right) \end{vmatrix}$$

mit $\overset{0}{\Delta}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}$ bezeichnen.

Den Eigenschaften 2 und 3 Art. 1 zufolge können wir setzen:

$$\begin{aligned} H_n^{\nu 0}(x) &= \binom{\nu 0}{1\infty} H_n^{1\infty}(x) + \binom{\nu 0}{2\infty} H_n^{2\infty}(x) + \ldots + \binom{\nu 0}{n\infty} H_n^{n\infty}(x) \\ &= \binom{\nu 0}{\alpha_1} H_n^{\alpha_1}(x) + \binom{\nu 0}{\alpha_2} H_n^{\alpha_2}(x) + \ldots + \binom{\nu 0}{\alpha_{n-1}} H_n^{\alpha_{n-1}}(x) + \binom{\nu 0}{\alpha} H_n^{\alpha}(x) \\ &= \binom{\nu 0}{b_1} H_n^{b_1}(x) + \binom{\nu 0}{b_2} H_n^{b_2}(x) + \ldots + \binom{\nu 0}{b_{n-1}} H_n^{b_{n-1}}(x) + \binom{\nu 0}{b} H_n^{b}(x), \end{aligned}$$

wo $\nu = 1\,2\,3 \ldots n$ sein kann, und:

$$\binom{\nu 0}{\mu\infty} \quad \binom{\nu 0}{\alpha_\mu} \quad \binom{\nu 0}{b_\mu} \quad \binom{\nu 0}{\alpha} \quad \binom{\nu 0}{b}$$

k Funktionen sind, so dass die Coefficienten der Relationen ungeändert bleiben, wenn in den $H_n^{\nu 0}$, $H_n^{\nu 0}$, $H_n^{\alpha\nu}$, $H_n^{b\nu}$, H_n^{α}, H_n^{b} $x\,q^m$ statt x gesetzt wird.

Wir bezeichnen nun mit $(0\,\infty)$ die k Funktion:

$$\begin{vmatrix} \binom{10}{1\infty} & \binom{10}{2\infty} & \cdots & \binom{10}{n\infty} \\ \binom{20}{1\infty} & \binom{20}{2\infty} & \cdots & \binom{20}{n\infty} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ \binom{n0}{1\infty} & \binom{n0}{2\infty} & \cdots & \binom{n0}{n\infty} \end{vmatrix},$$

mit $(0\,\alpha)$ die k Funktion:

$$\begin{vmatrix} \binom{10}{\alpha_1} & \binom{10}{\alpha_2} & \cdots & \binom{10}{\alpha_{n-1}} & \binom{10}{\alpha} \\ \binom{20}{\alpha_1} & \binom{20}{\alpha_2} & \cdots & \binom{20}{\alpha_{n-1}} & \binom{20}{\alpha} \\ & & & & \\ \binom{n0}{\alpha_1} & \binom{n0}{\alpha_2} & & \binom{n0}{\alpha_{n-1}} & \binom{n0}{\alpha} \end{vmatrix}$$

und mit $(o\,b)$ die k Funktion:

$$\begin{vmatrix} \binom{10}{b_1} & \binom{10}{b_2} & \binom{10}{b_3} & \cdots & \binom{10}{b_{n-1}} & \binom{10}{b} \\ \binom{20}{b_1} & \binom{20}{b_2} & \binom{20}{b_3} & \cdots & \binom{20}{b_{n-1}} & \binom{20}{b} \\ - & - & - & - & - & - \\ \binom{n0}{b_1} & \binom{n0}{b_2} & \binom{n0}{b_3} & \cdots & \binom{n0}{b_{n-1}} & \binom{n0}{b} \end{vmatrix}.$$

Dann ist:

$$1)\quad \overset{0}{\Delta} m_1\, m_2 \ldots m_n = (0\,\alpha)\, \overset{\alpha}{\Delta} m_1\, m_2 \ldots m_n = (o\,b)\, \overset{b}{\Delta} m_1\, m_2 \ldots m_n$$
$$= (0\infty)\, \overset{\infty}{\Delta} m_1\, m_2 \ldots m_n.$$

Hierin bedeuten $\Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}$, resp. $\Delta^{a}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}$, resp. $\Delta^{b}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}$ Determinanten, die der Determinante $\Delta^{c}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}$ analog aus den Funktionen $H_n^{\nu\infty}$, resp. $H_n^{a_\nu}$, H_n^{a}, resp. $H_n^{b_\nu}$, H_n^{b} zusammengesetzt sind.

Die Grössen $\binom{\mu\,o}{\alpha_\nu}$ $\binom{\mu\,o}{\alpha}$ können in dem Punkte $q^{-\alpha_\nu}$, also, da sie k Funktionen sind, in der completen Punktfolge $q^{-\alpha_\nu}$, nicht unendlich werden. Denn würden einige diese Eigenschaft haben, so würde in der Relation:

$$H_n^{\mu o} = \binom{\mu\,o}{\alpha_1} H_n^{\alpha_1} + \ldots + \binom{\mu\,o}{\alpha} H_n^{\alpha}$$

die linke Seite für $x = q^{-\alpha_\nu + m}$, wo $q^{-\alpha_\nu + m}$ kleiner ist, als die Kleinste der Grössen $q^{-\alpha_\nu}$, endlich bleiben, und es würden aus dem Unendlich werden einer der Grössen $\binom{\mu\,o}{\alpha_1}$ $\binom{\mu\,o}{\alpha_2}$ $\binom{\mu\,o}{\alpha_{n-1}}$ $\binom{\mu\,o}{\alpha}$ für $q^{-\alpha_\nu}$, also auch für $q^{-\alpha_\nu + m}$ notwendig Relationen zwischen $H_n^{\alpha_\nu}$, H_n^{α} folgen. Dasselbe gilt für die Grössen $\binom{\mu\,o}{b}$ und $\binom{\mu\,o}{b_\nu}$ in Bezug auf die Werthe $q^{b_\nu - \alpha_\nu + \lambda - 1}$ und $q^{-\alpha_\nu}$.

Demnach bleibt:

$$D\, m_1\, m_2 \ldots m_n = \Delta^{0}\, m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\,(1 + \alpha_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu,\, q,\, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\,(\alpha_\nu + m_\tau,\, q,\, x)}\, x^{1 - b - \lambda - \Sigma(n-2)}$$

wegen der Eigenschaften 3 und 4 Art. 1 und der Gleichungen 1 Art. 2 für endliche Werthe von x endlich, wenn m_τ die kleinste, m_μ die grösste der Zahlen $m_1\, m_2 \ldots m_n$ ist.

Aus den Gleichungen 8 und 6 der Einleitung folgt, dass man den obigen Ausdruck auch in der Form schreiben kann:

$$(0\,\infty)\, \Delta^{\infty} m_1\, m_2 \ldots m_n \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(1 + \alpha_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu,\, q,\, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(\alpha_\nu + m_\tau,\, q,\, x)} \cdot \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\,(\alpha_\nu + m_\tau,\, q,\, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\,(1 + \alpha_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu,\, q,\, x)}\, x^{1 - b - \lambda - \Sigma(n-2)}.$$

$$= (0\infty) \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\,(\alpha_\nu + m_\tau,\, q,\, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\,(1 + \alpha_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu,\, q,\, x)} \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(1 + \alpha_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu,\, q,\, \frac{q^{-\alpha_\nu + b_\nu + \lambda - m_\mu}}{x}\right)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(\alpha_\nu + m_\tau,\, q,\, \frac{q^{1 - \alpha_\nu - m_\tau}}{x}\right)} (-x)^{-\Sigma b_\nu - (n-1)(\lambda - 1) + (n-1)(m_\mu - m_\tau)} \cdot \Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}\, x^{1 - b - \lambda - \Sigma(n-2)}$$

$$= (0\infty) \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\,(\alpha_\nu + m_\tau,\, q,\, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\,(1 + \alpha_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu,\, q,\, x)} \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(1 + \alpha_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu,\, q,\, \frac{q^{-\alpha_\nu + b_\nu + \lambda - m_\mu}}{x}\right)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(\alpha_\nu + m_\tau,\, q,\, \frac{q^{1 - \alpha_\nu - m_\tau}}{x}\right)} \cdot \Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}\, x^{\sigma - (\lambda - 1)(n-1) + \Sigma(n-2)} \cdot x^{(n-1)(m_\mu - m_\tau) - (n-1)^2}.$$

Da die k Funktion $(o\,\infty) = \frac{\Delta^{0}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}}{\Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}}$ nie in einem einzelnen Punkte, sondern stets nur in einer completen Punktfolge unendlich werden kann, da ferner die Funktion $\Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}$ nach den Eigenschaften 3 Art. 1 in eine convergente nach fallenden Potenzen von x geordnete Reihe entwickelbar ist, und deshalb für $q < 1$ nie in einer Reihe von Punkten $q^{\vartheta - 1}$ $q^{\vartheta - 2}$ $q^{\vartheta - 3}$ .... ad. inf. unendlich oder Null werden kann, so wird

$$(0\,\infty) = \frac{\Delta^{0}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}}{\Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}} = (0\,a) \frac{\Delta^{a}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}}{\Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}} = (0\,b) \frac{\Delta^{b}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}}{\Delta^{\infty}_{m_1\, m_2 \ldots m_n}}$$

in keinem anderen Punkte o, als in denen der completen Punktfolgen $q^{b_\nu + \lambda - a_\nu - 1}$ $(\nu = 1 \ldots n-1)$, und in keinem anderen ∞ als in den Punkten der completen Punktfolgen q^{-a_ν} $(\nu = 1 \ldots n-1)$.

Da ausserdem $(o\,\infty)$ sich bei $x = o$ und $x = \infty$ gerade so verzweigt wie:

$$\frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma(1 + a_\nu - b_\nu - \lambda + m_\mu, q, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma(a_\nu + m_\tau, q, x)},$$

so kann $(o\,\infty)$ von dieser Grösse nur um einen constanten Faktor verschieden sein*).

Nach den Eigenschaften 3 und 4 muss $\Delta^{\infty}_{m_1 m_2 \ldots m_n} x^{\sigma - (\lambda - 1)(n-1) + \Sigma(n-2)}$ für $x = \infty$ eindeutig und endlich sein. Weiter wird $p(a, q, \frac{1}{x})$ für $x = \infty$ der Einheit gleich. Demnach ist $D_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ eindeutig und wird dort unendlich, wie die Potenz $x^{(n-1)(m_\mu - m_\tau) - (n-1)^2}$. $D_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ ist also eine ganze Funktion vom Grade:

$$(n-1)(m_\mu - m_\tau) - (n-1)^2.$$

Im Besonderen ist:

$$\Delta^{o}_{o\,1 \ldots n-1} = C \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(a_\nu, q, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(n + a_\nu - b_\nu - \lambda, q, x)}\, x^{b + \lambda - 1 + \Sigma(n-2)}$$

$$\Delta^{o}_{o\,1 \ldots \mu - 1,\, \mu + 1 \ldots n} = \overset{\mu}{\varphi}_{n-1}(x) \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(a_\nu, q, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(n + 1 + a_\nu - b_\nu - \lambda, q, x)}\, x^{b + \lambda - 1 + \Sigma(n-2)}$$

$$\Delta^{o}_{12 \ldots n} = C_1 \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(a_\nu + 1, q, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(n + 1 + a_\nu - b_\nu - \lambda, q, x)}\, x^{b + \lambda - 1 + \Sigma(n-2)},$$

wo C und C_1 Constante und $\overset{\mu}{\varphi}_{n-1}(x)$ ganze Funktionen von x vom Grade $n-1$ bedeuten. Unter Berücksichtigung der Relation:

$$p(a + 1, q, x) = (1 - x\,q^{-a})\, p(a, q, x)$$

ergiebt sich durch Einsetzen der gefundenen Ausdrücke in die Identität:

$$\begin{vmatrix} H_n(x) & H_n(xq) & \ldots & H_n(xq^n) \\ H_n^{10}(x) & H_n^{10}(xq) & \ldots & H_n^{10}(xq^n) \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ H_n^{no}(x) & H_n^{no}(xq) & \ldots & H_n^{no}(xq^n) \end{vmatrix} = 0$$

und nach Weglassung gemeinsamer Faktoren für H_n die Funktionalgleichung n. Ordnung:

$$2)\quad \prod_1^{n-1}(\nu)\,(1 - x\,q^{n - b_\nu + a_\nu - \lambda})\, H_n(xq^n) + \sum_1^{n-1}\mu\, \overset{\mu}{\varphi}_{n-1}(x)\, H_n(xq^\mu) + C_0 \prod_1^{n-1}(\nu)\,(1 - x\,q^{a_\nu})\, H_n(x) = 0,$$

oder die Differenzengleichung:

$$3)\quad \sum_{\mu = o}^{\mu = n} x^\mu \overset{\mu}{F}(x) \frac{\Delta^\mu H_n(x)}{\Delta x^\mu} = x^n \prod_1^{n-1}(\nu)\Big(1 - x\,q^{n - b_\nu + a_\nu - \lambda}\Big) \frac{\Delta^n H_n(x)}{\Delta x^n} + \sum_0^{n-1}\mu\, x^\mu\, \overset{\mu}{F}(x) \frac{\Delta^\mu H_n(x)}{\Delta x^\mu} = 0,$$

---

*) *Thomae:* Les séries Heinéennes superieures. Annali di Matematica. F. Brioschi e L. Cremona. Milano. 1871. Ser. IIa Tomo IVo. p. 125 und 126.

in der nach den Formeln 1 der Einleitung:

$$\sum_0^n (\mu) (-1)^\mu \; F^\mu(x) \; (q-1)^\mu = Const. \prod_1^{n-1}(\nu) \, (1 - x\, q^{a_\nu})$$

ist, und $F^\mu(x)$ ganze Funktionen höchstens vom Grade $n-1$ sind.

Setzen wir nun für H_n die nach um eine Einheit auf- oder absteigenden Potenzer von x geordnete Reihe:

$$\Sigma\, C_m\, x^m,$$

deren Anfangsexponent unbestimmt ist, in die Differenzengleichung ein, so ergiebt sich:

$$\Sigma\, C_m \left[F^n(x) \frac{(q^m-1)\,(q^{m-1}-1)\,.\,.\,(q^{m-n+1}-1)}{(q-1)\,(q-1)\,.\,.\,(q-1)} + F^{n-1}(x) \frac{(q^m-1)\,.\,.\,(q^{m-n+2}-1)}{(q-1)\,.\,.\,(q-1)} \right.$$

$$\left. + \ldots + F^\mu(x) \frac{(q^m-1)\,.\,.\,(q^{m-\nu+1}-1)}{(q-1)^\nu} + \,.\,.\, + F^0(x) \right] x^m = 0.$$

Es sei nun:

$$F^\mu(x) = F_0^\mu + F_1^\mu \,.\, x + F_2^\mu\, x^2 + \,.\,.\, + F_{n-1}^\mu\, x^{n-1}.$$

Dann ist der Coefficient von x^m in der vorigen Summe:

$$4) \left\{ \begin{aligned}
& C_m \left[\frac{(q^m-1)\,.\,.\,.\,(q^{m-n+1}-1)}{(q-1)^n} F_0^n + \frac{(q^m-1)\,.\,.\,.\,.\,(q^{m-n+2}-1)}{(q-1)^{n-1}} F_0^{n-1} + \ldots + F_0^0 \right] \\
& + C_{m-1} \left[\frac{(q^m-1)\,.\,.\,.\,(q^{m-n+1}-1)}{(q-1)^n} F_1^n + \,.\,. \qquad\qquad + \frac{q^m-1}{q-1} F_1^0 \right] \\
& \text{— — — — — — — — — — —} \\
& + C^\mu \left[\frac{(q^m-1)\,.\,.\,.\,(q^{m-n+1}-1)}{(q-1)^n} F_{m-\mu}^n + \ldots + \frac{(q^m-1)}{(q-1)} F_{m-\mu}^1 + F_{m-\mu}^0 \right] \\
& \text{— — — — — — — — — — —} \\
& + C_{m-n+1} \left[\frac{(q^m-1)\,.\,.\,(q^{m-n+1}-1)}{(q-1)^n} F_{n-1}^n + \,.\,. + \frac{(q^m\;1)}{(q-1)} F_{n-1}^1 + F_{n-1}^0 \right].
\end{aligned} \right.$$

Derselbe muss für jedes ganzzahlige m verschwinden. Ist aber, wenn m zunimmt ν der Anfangsexponent, so ist $C_{\nu-1}$, $C_{\nu-2}$, . . . $C_{\nu-n+1}$ gleich Null zu setzen, und man hat also noch die folgenden Gleichungen zu erfüllen:

$$C_\nu \left[\frac{(q^\nu-1)\,.\,.\,.\,(q^{\nu-n+1}-1)}{(q-1)^n} F_0^n + \ldots . + \frac{q^\nu-1}{q-1} F_0^1 + F_0^0 \right] = o$$

$$5) \left\{ \begin{aligned}
& C_{\nu+1} \left[\frac{(q^{\nu+1}-1)\,.\,.\,(q^{\nu-n+2}-1)}{(q-1)^n} F_0^n + \,.\,. + \frac{(q^{\nu+1}-1)}{q-1} F_0^1 + F_0^0 \right] \\
& \quad + C_\nu \left[\frac{(q^\nu-1)\,.\,.\,(q^{\nu-n+1}-1)}{(q-1)^n} F_1^n + \,.\,. + \frac{(q^\nu-1)}{(q-1)} F_1^1 + F_1^0 \right] = o. \\
& \text{— — — — — — — — —} \\
& \text{und endlich:} \\
& C_{\nu+n-2} \left[\frac{(q^{\nu+n-2}-1)\,.\,.\,(q^{\nu-1}-1)}{(q-1)^n} F_0^n + \,.\,. + \frac{(q^{\nu+n-2}-1)}{q-1} F_0^1 + F_0^0 \right] \\
& + C_{\nu+n-3} \left[\frac{(q^{\nu+n-3}-1)\,.\,.\,(q^{\nu-2}-1)}{(q-1)^n} F_1^n + \,.\,. + \frac{(q^{\nu+n-3}-1)}{q-1} F_1^1 + F_1^0 \right] . \\
& \text{— — — — — — — — —} \\
& \quad + C_\nu \left[\frac{q^\nu - 1\,.\,.\,.\,(q^{\nu-n+1}-1)}{(q-1)^n} F_{n-2}^n + \,.\,. + \frac{(q^\nu-1)}{q-1} F_{n-2}^1 + F_{n-2}^0 \right] = o.
\end{aligned} \right.$$

Sollen nun der Differenzengleichung Integrale genügen von der Form der Zweige $H_n^{10} \ldots H_n^{n-1,0}$, denen die Eigenschaften 3 und 4 zukommen, so muss das obige Gleichungssystem für $\nu = o$ erfüllt sein und für $C_\nu, C_{\nu+1}, \ldots\ldots C_{\nu+n-2} (\nu = o)$ unbestimmte Werte liefern.

Dieser Bedingung wird genügt, wenn:

$$6) \begin{cases} F_0^0 = F_1^0 = F_2^0 = \ldots = F_{n-2}^0 = 0. \\ F_0^1 = F_1^1 = F_2^1 = \ldots = F_{n-2}^1 = 0 \\ F_0^{n-2} = 0 \end{cases}$$

ist.

Indem man nun die Constanten $C_0\, C_1 \ldots C_{n-2}$ auf $n-1$ verschiedene Weisen bestimmt, erhält man $n-1$ verschiedene Integrale, die in der Umgebung des Punktes $x = 0$ die Eigenschaften von $H_n^{10} \ldots H_n^{n-1,0}$ haben. Setzt man $\nu = 1, \nu = 2, \ldots \nu = n-2$, so ergeben sich keine neuen Reihenentwickelungen, sondern nur solche, welche aus den vorigen erhalten werden, wenn man $C_0 = 0$, resp. $C_0 = C_1 = 0$ u. s. w. resp. $C_0 = C_1 = \ldots = C_{n-3} = 0$ setzt.

Die Bedingungen 6 sind gleichbedeutend damit, dass $F^{n-2}(x)$ durch x, $F^{n-3}(x)$ durch x^2, $\ldots F^{n-\nu}(x)$ durch $x^{\nu-1}$ u. s. w., und endlich $F^0(x)$ durch x^{n-1} theilbar sei, so dass die Differenzengleichung nach Division durch x^{n-1} in die Form:

$$\sum_0^n{}_\mu\, \varphi_\mu(x) \frac{\Delta^\mu H_n(x)}{\Delta x^\mu} = x \prod_1^{n-1}{}_{(\nu)} (1 - x\, q^{n-b_\nu+a_\nu+\lambda}) \frac{\Delta^n H_n(x)}{\Delta x^n} + \sum_0^{n-1}{}_\mu\, \varphi_\mu(x) \frac{\Delta^\mu H_n(x)}{\Delta x^\mu} = 0$$

übergeht, wo $\varphi_\mu(x)$ eine ganze Funktion höchstens vom Grade μ bedeutet.

Setzt man jetzt $\nu = b + \lambda - 1$, so erhält man als notwendige Bedingung dafür, dass H_n^{n0} der Differenzengleichung genügt:

$$7) \frac{q^{b+\lambda-n} - 1}{q-1} \varphi_n'(o) + \varphi_{n-1}(o) = o.$$

Wenn aber in der Summe 4 m abnimmt und ν der Exponent der höchst vorkommenden Potenz ist, so sind $C_{\nu+1}, C_{\nu+2} \ldots C_{\nu+n-2}$ gleich o zu setzen, und man hat daher die $n-1$ besonderen Gleichungen, in denen $a_{\nu,\mu}$ der Coefficient von x^μ in $\varphi_\nu(x)$ ist, zu erfüllen:

$$C_\nu \left[\frac{(q^\nu - 1) \ldots (q^{\nu-n+1} - 1)}{(q-1)^n} a_{n,n} + \frac{(q^\nu - 1) \ldots (q^{\nu-n+2} - 1)}{(q-1)^{n-1}} a_{n-1,n-1} + \ldots + a_{o,o} \right] = o$$

$$C_{\nu-1} \sum_0^n{}_\mu \frac{(q^{\nu-1} - 1) \ldots (q^{\nu-\mu} - 1)}{(q-1)^\mu} a_{\mu,\mu} + C_\nu \sum_1^n{}_\mu \frac{(q^\nu - 1) \ldots (q^{\nu-\mu+1} - 1)}{(q-1)^\mu} a_{\mu,\mu-1} = o$$

u. s. f.

$$C_{\nu-n+2} \sum_0^n{}_\mu \frac{(q^{\nu-n+2} - 1) \ldots (q^{\nu-n-\mu+3} - 1)}{(q-1)^\mu} a_{\mu,\mu}$$

$$+ C_{\nu-n+3} \sum_1^n{}_\mu \frac{(q^{\nu-n+3} - 1) \ldots (q^{\nu-n-\mu+4} - 1)}{(q-1)^\mu} a_{a,\mu-1}$$

— — — — — — — — —

$$+ C_\nu \sum_{n-2}^n{}_\mu \frac{(q^\nu - 1) \ldots (q^{\nu-\mu+1} - 1)}{(q-1)^\mu} a_{\mu,\mu-n+2} = o.$$

Hierin soll, wie auch stets im Folgenden, für $(q^\vartheta - 1)(q^{\vartheta-1} - 1) \ldots (q^{\vartheta-\mu+1} - 1)$ wenn $\mu = o$ ist, die Einheit gesetzt werden.

Die obigen Gleichungen sollen identisch erfüllt sein für $\nu = \lambda - 1$, denn nur dann giebt es für H_n Entwickelungen $H_n^{1\infty}\ H_n^{2\infty} \ldots H_n^{n-1,\infty}$ mit den Eigenschaften 3 und 4. Indem wir also die Coefficienten der $C_\nu\ C_{\nu-1} \ldots C_{\nu-n+2}$ für $\nu = \lambda - 1$ gleich o setzen, erhalten wir unter Fortlassung gemeinsamer Faktoren das Gleichungssystem:

$$8)\qquad G^{\mu}_{\nu} = \sum_{\mu}^{n}{}_{\alpha} \frac{(q^{\lambda-n+\nu+1}-1)\dots(q^{\lambda-n-\alpha+\nu+\mu+2}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}}\, a_{\alpha,\alpha-\mu} = 0.$$

$$\mu = 0\,1 \dots\dots n-2.$$
$$\nu = 0\,1 \dots\dots n-\mu-2.$$

In den $n-\mu-1$ Gleichungen G^{μ}_{ν} $(\nu = 0\,1 \dots n-\mu-2)$ sind die unbekannten Coefficienten $a_{\alpha,\alpha-\mu}$ $\alpha = \mu, \mu+1, \dots n$ enthalten. Es ist also möglich $a_{\mu,0}, a_{\mu+1,1}, \dots a_{n-2,n-\mu-2}$ durch $a_{n-1,n-\mu-1}$ und $a_{n,n-\mu}$ auszudrücken, so dass die Differenzengleichung bis auf $2n+1$ Coefficienten durch 8 bestimmt ist. $n+1$ weitere Coefficienten sind durch die Beziehung:

$$\varphi_n(x) = x \prod_{1}^{n-1}{}_{(\nu)} (1 - x\, q^{n-b_\nu+a_\nu-\lambda})$$

und noch $n-1$ andere durch die Gleichung

$$8^{a})\qquad \sum_{\mu=0}^{\mu=n} (-1)^{\mu}\, \varphi_{n-\mu}(x)\, x^{\mu}\, (q-1)^{\mu} = Const. \prod_{1}^{n-1}{}_{(\nu)} (1 - x\, q^{a_\nu}),$$

gegeben, und der letzte endlich ist durch Gleichung 7 bestimmt.

Wir wollen nun für unsere Differenzengleichung durch Umformung des Gleichungssystems 8 eine einfachere Form gewinnen und bilden zu diesem Zwecke das Gleichungssystem*):

$$= G^{\mu}_{n-\mu-2} + \sum_{1}^{k-\mu+1}{}_{(\tau)} (-1)^{\tau}\, G^{\mu}_{n-\mu-\tau-2} \frac{(q^{k-\mu+1}-1)(q^{k-\mu}-1)\dots(q^{k-\mu-\tau+2}-1)}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^{\tau}-1)}\, q^{\Sigma(\tau-1)}$$

für $k = \mu-1, \mu, \mu+1 \dots n-3.$

Der Faktor von $a_{\alpha,\alpha-\mu}$ in der Gleichung S_k hat die Form:

$$\Gamma^{\alpha}_{k} = \sum_{0}^{k-\mu+1}{}_{(\tau)} (-1)^{\tau} \frac{(q^{\lambda-\mu-\tau-1}-1)(q^{\lambda-\mu-\tau-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-\tau}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}} \cdot \frac{(q^{k-\mu+1}-1)\dots(q^{k-\mu-\tau+2}-1)}{(q-1)\dots(q^{\tau}-1)}\, q^{\Sigma(\tau-1)}$$

Es ist nun:

$$9)\qquad \Gamma^{\alpha}_{k} - q^{k-\mu+1} \sum_{0}^{k-\mu+1}{}_{\tau} (-1)^{\tau} \frac{(q^{\lambda-\mu-\tau-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-\tau-1}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}} \cdot \frac{(q^{k-\mu+1}-1)(q^{k-\mu+2}-1)\dots(q^{k-\mu-\tau+2}-1)}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^{\tau}-1)}\, q^{\Sigma(\tau-1)}$$

$$= \frac{(q^{\lambda-\mu-1}-1)\dots\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}} + (-1)^{k-\mu+2} \frac{(q^{\lambda-k-3}-1)\dots(q^{\lambda-k-\alpha+\mu-2}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}} \cdot \frac{(q^{k-\mu+1}-1)\dots(q-1)}{(q-1)\dots(q^{k-\mu+1}-1)}\, q^{\Sigma(k-\mu+1)}$$

$$+ \sum_{1}^{k-\mu+1}{}_{\tau} (-1)^{\tau} \frac{(q^{\lambda-\mu-\tau-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-\tau}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}} \cdot \frac{(q^{k-\mu+1}-1)(q^{k-\mu+1}-1)\dots(q^{k-\mu-\tau+3}-1)}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^{\tau-1}-1)} \left[\frac{q^{k-\mu-\tau+2}-1}{q^{\tau}-1}\, q^{\tau-1} + q^{k-\mu+1}\right] q^{\Sigma(\tau-2)}.$$

$$= \sum_{0}^{k-\mu+2}{}_{\tau} (-1)^{\tau} \frac{(q^{\lambda-\mu-\tau-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-\tau}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}} \cdot \frac{(q^{k-\mu+2}-1)\dots(q^{k-\mu-\tau+3}-1)}{(q-1)\dots(q^{\tau}-1)}\, q^{\Sigma(\tau-1)}$$

$$= \Gamma^{\alpha}_{k+1}.$$

Ist nun für $\alpha > k$:

$$10)\qquad \Gamma^{\alpha}_{k} = \frac{(q^{\lambda-k-2}-1)(q^{\lambda-k-3}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-k-1}} \cdot \frac{(q^{\alpha-\mu}-1)(q^{\alpha-\mu-1}-1)\dots(q^{\alpha-k}-1)}{(q-1)^{k-\mu+1}}\, q^{(\lambda-\alpha-1)(k-\mu+1)}$$

und folglich der Ausdruck

---

*) *Pochhammer:* Cr. J. 70. p. 312.

$$\sum_{0}^{k-\mu+1}\tau\,(-1)^{\tau}\frac{(q^{\lambda-\mu-\tau-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-\tau-1}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}}\,\frac{(q^{k-\mu+1}-1)\dots\dots(q^{k-\mu-\tau+2}-1)}{(q-1)\dots\dots(q^{\tau}-1)}\,q^{\Sigma(\tau-1)}$$

welcher aus Γ_k^{α} hervorgeht, wenn $\lambda-1$ an die Stelle von λ gesetzt wird, gleich:

$$10^{a})\quad \frac{(q^{\lambda-k-3}-1)(q^{\lambda-k-4}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-1}-1)}{(q-1)^{\alpha-k-1}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots(q^{\alpha-k}-1)}{(q-1)^{k-\mu+1}}\,q^{(\lambda-\alpha-2)(k-\mu+1)}$$

so ist nach der Relation 9:

$$\Gamma_{k+1}^{\alpha}=\frac{(q^{\lambda-k-3}-1)(q^{\lambda-k-4}-1)\dots\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-k-2}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots\dots(q^{\alpha-k}-1)}{(q-1)^{k-\mu+1}}\,q^{(\lambda-\alpha-1)(k-\mu+1)}\left[\frac{q^{\lambda-k-2}-1}{q-1}-\frac{q^{\lambda-\alpha-1}-1}{q-1}\right]$$

$$=\frac{(q^{\lambda-k-3}-1)(q^{\lambda-k-4}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-k-2}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots(q^{\alpha-k-1}-1)}{(q-1)^{k-\mu+2}}\,q^{(\lambda-\alpha-1)(k-\mu+2)}.$$

Da nun:

$$\Gamma_{\mu}^{\alpha}=\frac{(q^{\lambda-\mu-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}}-\frac{(q^{\lambda-\mu-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-1}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}}$$

$$=\frac{(q^{\lambda-\mu-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu-1}}\left[\frac{q^{\lambda-\mu-1}-1}{q-1}-\frac{q^{\lambda-\alpha-1}-1}{q-1}\right],$$

$$10^{b})\quad =\frac{(q^{\lambda-\mu-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu-1}}\,\frac{q^{\alpha-\mu}-1}{q-1}\,q^{\lambda-\alpha-1},\ \text{für } \alpha>\mu,\ \text{und} = o,\ \text{wenn } \alpha\leq\mu,$$

und:

$$10^{c})\quad \sum_{\tau=0}^{\tau=1}(-1)^{\tau}\frac{(q^{\lambda-\mu-\tau-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-\tau-1}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}}=\frac{(q^{\lambda-\mu-3}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha-1}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu-1}}\,\frac{q^{\alpha-\mu}-1}{q-1}\,q^{\lambda-\alpha-2};\ (\alpha>\mu);\ = o\ (\alpha\leq\mu).$$

ist, so muss die Formel 10, wenn $\alpha>k$, für ein beliebiges k der Reihe $\mu-1\ \mu\dots n-3$ Gültigkeit haben.

Aus der Gleichung 9 folgt dagegen, unter Benutzung der Gleichungen 10 und 10ª, dass:

$$\Gamma_k^{\alpha}\ \text{für } \alpha<k \text{ verschwindet,}$$

so dass das Gleichungssystem S_k lautet:

$$\begin{cases}\sum_{\mu}^{n}\alpha\ \Gamma_{\mu-1}^{\mu}\ a_{\alpha,\alpha-\mu}=o\\ \sum_{\mu+1}^{n}\alpha\ \Gamma_{\mu}^{\alpha}\ a_{\alpha,\alpha-\mu}=o.\\ \sum_{n-2}^{n}\alpha\ \Gamma_{n-3}^{\alpha}\ a_{\alpha,\alpha-\mu}=o.\end{cases}$$

oder:

$$\begin{cases}\sum_{\mu}^{n}\alpha\ \frac{(q^{\lambda-\mu-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu}}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}=o\\ \sum_{\mu+1}^{n}\alpha\ \frac{(q^{\lambda-\mu-2}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-\mu-1}}\,\frac{q^{\alpha-\mu}-1}{q-1}\,q^{\lambda-\alpha-1}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}=o.\\ \text{— — — — — — — — — — — — —}\\ \sum_{n-2}^{n}\alpha\ \frac{(q^{\lambda-n+1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha-n+2}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots(q^{\alpha-n+3}-1)}{(q-1)^{n-\mu-2}}\,q^{(\lambda-\alpha-1)}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}=o.\end{cases}$$

oder nach Weglassung gemeinsamer Faktoren:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{\mu}^{n}\alpha\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha}}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}=0\\
&\sum_{\mu+1}^{n}\alpha\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)}{(q-1)}\,q^{-\alpha}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}=0.\\
&-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\\
&\sum_{n-2}^{n}\alpha\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots(q^{n-\mu-1}-1)}{(q-1)\dots(q^{\alpha-n+2}-1)}\,q^{-\alpha(n-\mu-2)}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}.
\end{aligned}\right.$$

Wir fassen nun von diesen Gleichungen die folgenden zusammen:

$$\sum_{n-2}^{n}\alpha\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots(q^{n-\mu-1}-1)}{(q-1)\dots(q^{\alpha-n+2}-1)}\,q^{(n-\alpha)(n-\mu-2)}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}=0.$$

u. s. f. bis:

$$\sum_{\varkappa}^{n}\alpha\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{\alpha-\varkappa}-1)}\,q^{(n-\alpha)(\varkappa-\mu)}\,a_{\alpha,\alpha-\mu}=0.$$

und multipliciren:

Die 1. Gleichung mit $\dfrac{(q^{n-\mu-2}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa-2}-1)}$,

die 2. Gleichung mit $(-1)\dfrac{(q^{n-\mu-3}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa-3}-1)}\,q^{2}$

— — — — — — — — — — —

die σ Gleichung mit $(-1)^{\sigma-1}\dfrac{(q^{n-\mu-\sigma-1}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa-\sigma-1}-1)}\,q^{\Sigma(\sigma-1)+\sigma-1}$.

— — — — — — — — — — —

die $n-\varkappa-1$ Gleichung mit $(-1)^{n-\varkappa-2}\,q^{\Sigma(n-\varkappa-2)+n-\varkappa-2}$,

und addiren alle, so ist der Faktor von $a_{\alpha,\alpha-\mu}$ $[\alpha=\varkappa,\ \varkappa+1\dots n-2]$

$$(-1)^{n-\alpha-2}\,q^{(\alpha-\mu)(n-\alpha)+\Sigma(n-\alpha-1)-1}\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-\alpha}-1)}{(q-1)^{\alpha}}\,\frac{(q^{\alpha-\mu}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{\alpha-\varkappa}-1)}\left\{1+\sum_{1}^{\alpha-\varkappa}r\,(-1)^{\nu}\frac{(q^{\alpha-\varkappa}-1)\dots(q^{\alpha-\varkappa-r+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{r}-1)}\,q^{\Sigma(r-1)}\right\}$$

dagegen der Faktor von $a_{n,n-\mu}$:

$$\frac{1}{q}\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-n}-1)}{(q-1)^{n}}\,\frac{(q^{n-\mu}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa}-1)}\sum_{\varkappa}^{n-\varkappa}r\,(-1)^{\nu}\frac{(q^{n-\varkappa}-1)\dots(q^{n-\varkappa-r+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{r}-1)}\,q^{\Sigma(r-1)},$$

und derjenige von $a_{n-1,n-\mu-1}$:

$$-q^{n-\mu-2}\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-n+1}-1)}{(q-1)^{n-1}}\,\frac{(q^{n-\mu-1}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa-1}-1)}\sum_{1}^{n-\varkappa-1}(r)\,(-1)^{r}\frac{(q^{n-\varkappa-1}-1)\dots(q^{n-\varkappa-r}-1)}{(q-1)\dots(q^{r}-1)}\,q^{\Sigma r-1}.$$

Nun ist aber, wenn m eine ganze Zahl ist:

$$p(m,q,x)=\lim_{n=\infty}(1-q^{n}x)^{m}\,\Pi\,\frac{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1})}{(1-xq^{m})\dots\dots(1-xq^{n+m-1})}=(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{m-1})$$

$$= 1 + \sum_1^m{}_n (-1)^n x^n \frac{(q^m-1)\dots(q^{m-n+1}-1)}{q-1\dots q^m-1} q^{\Sigma(n-1)}$$

$$p(m,q,1) = 1 + \sum_1^m{}_n (-1)^n \frac{(q^m-1)\dots(q^{m-n+1}-1)}{q-1\dots(q^n-1)} q^{\Sigma(n-1)} = 0.$$

Demnach ist:

der Faktor von $a_{\alpha,\alpha-\mu}$ $[\alpha = \varkappa+1,\dots n-3] = 0$,

derjenige von $a_{\varkappa,\varkappa-\mu} = \frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-\varkappa}-1)}{(q-1)^{\varkappa}}(-1)^{n-\varkappa-2} q^{(\varkappa-\mu)(n-\varkappa)+\Sigma(n-\varkappa-1)-1}$;

der von $a_{n,n-\mu} = -\frac{1}{q}\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-n}-1)}{(q-1)^n}\frac{(q^{n-\mu}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa}-1)}\left\{1-\frac{q^{n-\varkappa}-1}{q-1}\right\}$

und endlich der Faktor von $a_{n,n-\mu-1}$

$$= q^{n-\mu-2}\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-n+1}-1)}{(q-1)^{n-1}}\frac{(q^{n-\mu-1}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa-1}-1)}.$$

Wir erhalten als Resultat der Summation die Gleichung:

$$(-1)^{n-\varkappa-2} q^{(\varkappa-\mu)(n-\varkappa)+\Sigma(n-\varkappa-1)-1} a_{\varkappa,\varkappa-\mu} = \frac{1}{q}\frac{(q^{\lambda-\varkappa-1}-1)\dots(q^{\lambda-n}-1)}{(q-1)^{n-\varkappa}}\cdot\frac{(q^{n-\mu}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa}-1)}\left\{1-\frac{q^{n-\varkappa}-1}{q-1}\right\} a_{n,n-\mu}$$

11) $$- q^{n-\mu-2}\frac{(q^{\lambda-\varkappa-1}-1)\dots(q^{\lambda-n+1}-1)}{(q-1)^{n-\varkappa-1}}\frac{(q^{n-\mu-1}-1)\dots(q^{\varkappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\varkappa-1}-1)} a_{n-1,n-\mu-1}.$$

Wenn jetzt der Reihe nach $\varkappa = n-2,\ n-3,\ \dots\ \mu$ gesetzt wird, erhält man $a_{n-2,\,n-\mu-2},\ a_{n-3,\,n-\mu-3},\ \dots\ a_{\mu,0}$ ausgedrückt durch $a_{n,\,n-\mu}$ und $a_{n,\,n-\mu-1}$.

Die Gleichung lässt sich in einfacherer Form darstellen, wenn man die Bezeichnung der Funktion $n-1$. Grades etwas ändert*).

Man setze:

$$\varphi_{n-1}(x) = -\left[\frac{q^{\lambda-n}-1}{q-1}\,\frac{\Delta\varphi\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x} + \psi\left(\frac{x}{q}\right)\right],$$

wo:

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) = \sum_0^n A_\nu x^{n-\nu},$$

$$\psi(x) = \sum_0^n B_\nu x^{n-\nu-1}$$

ist, und $\frac{\Delta\varphi\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x}$ bedeutet, dass nach Ausführung der Operation $\frac{\Delta}{\Delta x}$ der Werth $\frac{x}{q}$ an Stelle von x gesetzt wird.

Es muss dann für

$a_{n,\,n-\mu}$ die Grösse A_μ, und für

*) *Pochhammer:* Cr. J. 70. p. 314.

$a_{n-1,\, n-\mu-1}$ der Ausdruck $-\frac{q^{\lambda-n}-1}{q-1}\,\frac{q^{n-\mu}-1}{q-1}\,\frac{A_\mu}{q^{n-\mu-1}} - \frac{B_\mu}{q^{n-\mu-1}}$,

eingeführt werden, so dass Gl. 11 die Form annimmt:

$$(-1)^{n-\kappa-2}\, q^{(\kappa-\mu)(n-\kappa)+\Sigma(n-\kappa-1)-1}\, a_{\kappa,\,\kappa-\mu} = \frac{1}{q}\,\frac{(q^{\lambda-\kappa-1}-1)(q^{\lambda-\kappa-2}-1)\dots(q^{\lambda-n}-1)}{(q-1)^{n-\kappa}}\,\frac{(q^{n-\mu}-1)\dots(q^{\kappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\kappa}-1)}\,A_\mu$$

$$+\frac{1}{q}\,\frac{(q^{\lambda-\kappa-1}-1)\dots(q^{\lambda-n+1}-1)}{(q-1)^{n-\kappa-1}}\,\frac{(q^{n-\mu-1}-1)\dots(q^{\kappa-\mu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\kappa-1}-1)}\,B_\mu .$$

Demnach ist:

$$12)\quad \begin{cases} (-1)^{n-\kappa-2}\,\varphi_\kappa(x) = \dfrac{(q^{\lambda-\kappa-1}-1)\dots(q^{\lambda-n}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\kappa}-1)}\,\dfrac{\Delta^{n-\kappa}\,\varphi\left(\frac{x}{q^{n-\kappa}}\right)}{\Delta x^{n-\kappa}}\,\dfrac{1}{q^{\Sigma(n-\kappa-1)}} \\ \qquad + \dfrac{(q^{\lambda-\kappa-1}-1)\dots(q^{\lambda-n+1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-\kappa-1}-1)}\,\dfrac{\Delta^{n-\kappa-1}\,\psi\left(\frac{x}{q^{n-\kappa}}\right)}{\Delta x^{n-\kappa-1}}\,\dfrac{1}{q^{\Sigma(n-\kappa-1)}}. \end{cases}$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die Funktion ψ zu bestimmen. Hierzu verhelfen die Gleichungen 7 und 8[a]. Nach Gleichung 8[a] ist:

$$\sum_0^n{}_\nu\, (-1)^\nu\, \varphi_{n-\nu}(x)\, x^\nu\, (q-1)^\nu = \text{Const.}\; x \prod_1^{n-1}{}_\nu\, (1 - x\, q^{\alpha_\nu}).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung 12 können wir die linke Seite in die Form bringen:

$$\sum_0^n{}_\nu\, x^\nu (q^{\lambda-n}-1)(q^{\lambda-n+1}-1)\dots(q^{\lambda-n+\nu-1}-1)\,\frac{\Delta^\nu\,\varphi\left(\frac{x}{q^\nu}\right)}{\Delta x^\nu}\,\frac{(q-1)^\nu}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^\nu-1)}\,\frac{1}{q^{\Sigma(\nu-1)}}$$

$$+\,x(q-1)\sum_0^{n-1}{}_\nu\, x^\nu (q^{\lambda-n+1}-1)(q^{\lambda-n+2}-1)\dots(q^{\lambda-n+\nu}-1)\,\frac{\Delta^\nu}{\Delta x^\nu}\,\psi\left(\frac{x}{q^{\nu+1}}\right)\frac{(q-1)^\nu}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^\nu-1)}\,\frac{1}{q^{\Sigma(\nu)}}.$$

$$=\sum_0^n{}_\mu\, A_{n-\mu}\, x^\mu \sum_0^\mu{}_\nu\, \frac{(q^{\lambda-n}-1)\dots(q^{\lambda-n+\nu-1}-1)}{q^{\nu(\mu-\nu)+\Sigma(\nu-1)}}\,\frac{(q^\mu-1)\dots(q^{\mu-\nu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^\nu-1)}$$

$$+\,x(q-1)\sum_0^{n-1}{}_\mu\, B_{n-\mu-1}\, x^\mu \sum_0^\mu{}_\nu\, \frac{(q^{\lambda-n+1}-1)\dots(q^{\lambda-n+\nu}-1)}{q^{(\nu+1)(\mu-\nu)+\Sigma(\nu)}}\,\frac{(q^\mu-1)\dots(q^{\mu-\nu+1}-1)}{(q-1)\dots(q^\nu-1)}.$$

Es ist, wenn $F(u)$ eine ganze Funktion n. Grades von u bedeutet:

$$F(u) = F(x) + \frac{\Delta F\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x}(u-x) + \frac{q-1}{q^2-1}\,\frac{\Delta^2\left(F\frac{x}{q^2}\right)}{\Delta x^2}\,\frac{(u-x)(uq-x)}{q} + \dots$$

$$+\,\frac{(q-1)^n}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}\,\frac{\Delta^n F\left(\frac{x}{q^n}\right)}{\Delta x^n}\,\frac{(u-x)(uq-x)\dots(uq^{n-1}-x)}{q^{\Sigma(n-1)}}.$$

also:

$$u^n = x^n + \frac{(q^n-1)}{(q-1)}\frac{x^{n-1}}{q^{n-1}}(u-x) + \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}\frac{x^{n-2}}{q^{2(n-2)}}\frac{(u-x)(uq-x)}{q} + \ldots$$
$$+ \frac{(q^n-1)\ldots(q^{n-n+1}-1)}{(q-1)\ldots(q^n-1)}\frac{(u-x)(uq-x)\ldots(uq^{n-1}-x)}{q^{\Sigma(n-1)}}\,x\,.$$

Wird jetzt:

$$u = q^{\lambda-n},\; n=\mu,\; x=1 \quad \text{gesetzt, so folgt:}$$

$$q^{\mu(\lambda-n)} = \sum_0^{\mu}{}_\nu \frac{(q^{\lambda-n}-1)\ldots\ldots(q^{\lambda-n+\nu-1}-1)}{q^{\nu(\mu-\nu)+\Sigma(\nu-1)}}\,\frac{(q^{\mu}-1)\ldots\ldots(q^{\mu-\nu+1}-1)}{(q-1)\ldots\ldots(q^{\nu}-1)}\,.$$

Folglich geht die linke Seite unserer Gl. über in:

$$\sum_0^{n}{}_\mu A_{n-\mu}\,x^\mu q^{\mu(\lambda-n)} + x(q-1)\sum_0^{n-1}{}_\mu B_{n-\mu-1}\,x^\mu q^{\mu(\lambda-n)} = \varphi(xq^{\lambda-n}) + x(q-1)\,\psi(xq^{\lambda-n})\,.$$

Es soll nun nach Gleichung 7:

$$\frac{q^{b+\lambda-n}-1}{q-1}\cdot\left[\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\right]_{x=0} - \frac{q^{\lambda-n}-1}{q-1}\left[\frac{\Delta\varphi\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x}\right]_{x=0} - \psi(0) = 0,$$

$$\psi(0) = \frac{q^b-1}{q-1}\,q^{\lambda-n},$$

$$\left[\frac{\varphi(q^{\lambda-n}x)}{x} + \psi(q^{\lambda-n}x)(q-1)\right]_{x=0} = q^{b+\lambda-n}.$$

sein. Folglich ist ψ durch die Gleichung:

$$\text{13)}\qquad \varphi(xq^{\lambda-n}) + x(q-1)\,\psi(xq^{\lambda-n}) = q^{b+\lambda-n}\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)}(1-xq^{\alpha_\nu})\,.$$

bestimmt.

Es ist daher nachgewiesen, dass die in Art. 1 definirte Funktion $H_n\begin{pmatrix} b & b_1\, b_2 \ldots b_{n-1} & \\ & \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} & \lambda, q, x\end{pmatrix}$ der Differenzengleichung:

$$x\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)}(1-xq^{n-b_\nu+\alpha_\nu-\lambda})\,\frac{\Delta^n H_n(x)}{\Delta x^n} + \sum_1^{n-1}{}_\nu\, \varphi_\nu(x)\,\frac{\Delta^\nu H_n(x)}{\Delta x^\nu} = 0$$

genügt, deren Coefficienten durch die Gleichungen 12 und 13 bestimmt sind. Wir wollen jetzt die einzelnen Zweige und Bestandtheile der Funktion H_n aus der Differenzengleichung herleiten, und dadurch nachweisen, dass dieselbe einer Funktion keine weiteren Beschränkungen auferlegt als die Eigenschaften 1 bis 4 Art. 1.

Art. 3.

Es gelingt für die Bestandtheile $H_n^{10} \ldots H_n^{n0}, H_n^{1\infty} \ldots H_n^{n\infty}$ bestimmte Summen aufzustellen von der Form, wie sie Herr *Thomae* auch für die *Heine*'sche Reihe gebraucht hat. Wir führen nämlich in die Differenzengleichung statt H_n eine bestimmte Summe ein, die x als Parameter und ausserdem eine von x unabhängige, unbestimmt gelassene Funktion enthält, über die so bestimmt wird, dass die Summation sich ausführen lässt.

Die Differenzengleichung lautet:

$$1)\quad \varphi(x)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}-\left[\frac{q^{\lambda-n}-1}{q-1}\,\frac{\Delta^1\varphi\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x}+\psi\frac{x}{q}\right]\frac{\Delta^{n-1}y}{\Delta x^{n-1}}+\frac{1}{q}\left[\frac{(q^{\lambda-n}-1)(q^{\lambda-n+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)}\,\frac{\Delta^2\varphi\left(\frac{x}{q^2}\right)}{\Delta x^2}+\frac{q^{\lambda-n+1}-1}{q-1}\,\frac{\Delta\psi\left(\frac{x}{q^2}\right)}{\Delta x}\right]\frac{\Delta^{n-2}y}{\Delta x^{n-2}}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$+\frac{(-1)^{n-k}}{q^{\Sigma(n-k-1)}}\left[\frac{(q^{\lambda-n}-1)(q^{\lambda-n+1}-1)\ldots(q^{\lambda-k-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^{n-k}-1)}\,\frac{\Delta^{n-k}\varphi\left(\frac{x}{q^{n-k}}\right)}{\Delta x^{n-k}}+\frac{(q^{\lambda-n+1}-1)\ldots(q^{\lambda-k-1}-1)}{(q-1)\ldots(q^{n-k-1}-1)}\,\frac{\Delta^{n-k-1}\psi\left(\frac{x}{q^{n-k}}\right)}{\Delta x^{n-k-1}}\right]\frac{\Delta^k y}{\Delta x^k}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$+\frac{(-1)^n}{q^{\Sigma(n-1)}}\left[\frac{(q^{\lambda-n}-1)(q^{\lambda-n+1}-1)\ldots(q^{\lambda-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^n-1)}\,\frac{\Delta^n\varphi\left(\frac{x}{q^n}\right)}{\Delta x^n}+\frac{(q^{\lambda-n-k}-1)\ldots(q^{\lambda-1}-1)}{(q-1)\ldots(q^{n-1}-1)}\,\frac{\Delta^{n-1}\psi\left(\frac{x}{q^n}\right)}{\Delta x^{n-1}}\right]y=o,$$

worin:

$$\varphi(x)=x\,(1-x\,q^{n-b_1+a_1-\lambda})\,(1-x\,q^{n-b_1+a_1-\lambda})\ldots(1-x\,q^{n-b_{n-1}+a_{n-1}-\lambda})$$

$$2)\quad \varphi(x\,q^{\lambda-n})+x\,(q-1)\,\psi(x\,q^{\lambda-n})=q^{b+\lambda-n}\,x\,(1-x\,q^{\alpha_1})\,(1-x\,q^{\alpha_2})\ldots(1-x\,q^{\alpha_n})$$

zu nehmen ist.

Man setze nun:

$$3)\quad y=\overset{h\,q^\infty}{\underset{h}{S}}\,U\,x^{\lambda-1}\,p\left(\lambda-1,q,\frac{u\,q}{x}\right)\frac{\Delta u}{u\,(q-1)},$$

worin U eine Funktion von u allein ist, und h constant oder x sein soll.

Dann folgt ohne weiteres, wenn h constant ist:

$$4)\quad \frac{\Delta^k(y)}{\Delta x^k}=(-1)^k\frac{1}{(q-1)^k}\overset{h\,q^\infty}{\underset{h}{S}}\,U\,x^{\lambda-1}\,p\left(\lambda-1,q,\frac{u\,q}{x}\right)\frac{(q^{\lambda-1}-1)(q^{\lambda-2}-1)\ldots(q^{\lambda-k}-1)}{(u\,q^{\lambda-1}-x)\ldots\ldots(u\,q^{\lambda-k}-x)}\,\frac{\Delta u}{u\,(q-1)}.$$

Ist aber $h=x$, dann haben wir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x\,(q-1)}\left\{\overset{x\,q^\infty}{\underset{x\,q}{S}}\,U\,x^{\lambda-1}\,q^{\lambda-1}\,p\left(\lambda-1,q,\frac{u}{x}\right)\frac{\Delta u}{u\,(q-1)}-\overset{x\,q^\infty}{\underset{x}{S}}\,U\,x^{\lambda-1}\,p\left(\lambda-1,q,\frac{u\,q}{x}\right)\frac{\Delta u}{u\,(q-1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{x\,(q-1)}\left\{\overset{x\,q^\infty}{\underset{x}{S}}\,U\,x^{\lambda-1}\,p\left(\lambda-1,q,\frac{u\,q}{x}\right)\left(q^{\lambda-1}\frac{1-\frac{u}{x}}{1-\frac{u\,q^{\lambda-1}}{x}}-1\right)\frac{\Delta u}{u\,(q-1)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{q-1}\overset{x\,q^\infty}{\underset{x}{S}}\,U\,x^{\lambda-1}\,p\left(\lambda-1,q,\frac{u\,q}{x}\right)\cdot\frac{q^{\lambda-1}-1}{u\,q^{\lambda-1}-x}\cdot\frac{\Delta u}{u\,(q-1)}.$$

Man sieht also, dass die Formel 4 auch für $h=x$ Gültigkeit hat. Durch Einsetzen der Werte 3 und 4 bringen wir die Differenzengleichung auf die Form:

$$o=\overset{h\,q^n}{\underset{h}{S}}\,U\,x^{\lambda-1}\,p\left(\lambda-1,q,\frac{u\,q}{x}\right)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(q^{\lambda-1}-1)(q^{\lambda-2}-1)\ldots(q^{\lambda-n}-1)}{(q-1)^n}\,\dfrac{\varphi(x)}{(u\,q^{\lambda-1}-x)(u\,q^{\lambda-2}-x)\ldots(u\,q^{\lambda-n}-x)}\\[2ex]+\dfrac{(q^{\lambda-1}-1)(q^{\lambda-2}-1)\ldots(q^{\lambda-n+1}-1)}{(u\,q^{\lambda-1}-x)(u\,q^{\lambda-2}-x)\ldots(u\,q^{\lambda-n}-x)}\,\dfrac{1}{(q-1)^n}\left[\dfrac{q^{\lambda-n}-1}{q-1}\,\dfrac{\Delta\varphi\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x}+\psi\left(\frac{x}{q}\right)\right]\end{array}\right.$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{1}{(q-1)^k}\,\frac{1}{q^{\Sigma(n-k-1)}}\,\frac{(q^{\lambda-1}-1)\dots(q^{\lambda-k}-1)}{(uq^{\lambda-1}-x)\dots(uq^{\lambda-k}-x)}\left[\frac{(q^{\lambda-n}-1)\dots(q^{\lambda-k-1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-k}-1)}\,\frac{\Delta^{n-k}\varphi\left(\frac{x}{q^{n-k}}\right)}{\Delta x^{n-k}}+\frac{(q^{\lambda-n+1}-1)\dots(q^{\lambda-k-1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-k-1}-1)}\,\frac{\Delta^{n-k-1}\psi\left(\frac{x}{q^{n-k}}\right)}{\Delta x^{n-k-1}}\right]$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$+\frac{1}{q^{\Sigma(n-1)}}\left[\frac{(q^{\lambda-n}-1)(q^{\lambda-n+1}-1)\dots(q^{\lambda-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}\,\frac{\Delta^n\varphi\left(\frac{x}{q^n}\right)}{\Delta x^n}+\frac{(q^{\lambda-n+1}-1)\dots(q^{\lambda-1}-1)}{(q-1)\dots(q^{n-1}-1)}\,\frac{\Delta^{n-1}\psi\left(\frac{x}{q^n}\right)}{\Delta x^{n-1}}\right].$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\varphi(uq^{\lambda-n})=\varphi(x)+\frac{\Delta\varphi\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x}(uq^{\lambda-n}-x)+\frac{q-1}{q^2-1}\,\frac{(uq^{\lambda-n}-x)(uq^{\lambda-n+1}-x)}{q}\,\frac{\Delta^2\varphi\left(\frac{x}{q^2}\right)}{\Delta x^2}+\dots\dots$$

$$+\frac{(q-1)^\nu}{q^{\Sigma(\nu-1)}}\,\frac{(uq^{\lambda-n}-x)\dots(uq^{\lambda-n+\nu-1}-1)}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^\nu-1)}\,\frac{\Delta^\nu\varphi\left(\frac{x}{q^n}\right)}{\Delta x^\nu}+\dots\dots+\frac{(q-1)^n}{q^{\Sigma(n-1)}}\,\frac{(uq^{\lambda-n}-x)\dots(uq^{\lambda-1}-x)}{(q-1)\dots(q^n-1)}\,\frac{\Delta^n\varphi\left(\frac{x}{q^n}\right)}{\Delta x^n}\,q^{\lambda-n}.$$

$$\psi(uq^{\lambda-n}-1)=\sum_0^{n-1}{}_{(\nu)}\,\frac{\Delta^\nu\psi\left(\frac{x}{q^{\nu+1}}\right)}{\Delta x^\nu}\,\frac{(q-1)^\nu}{q^{\Sigma(\nu-1)}}\,\frac{(uq^{\lambda-n+1}-x)\dots(uq^{\lambda-n+\nu}-x)}{(q-1)\dots(q^\nu-1)}$$

deren Berechtigung evident ist, da beide Seiten ganze Funktionen von x vom Grade n resp. $n-1$ sind, und deren Richtigkeit am leichtesten dadurch bewiesen wird, dass die successiven Differenzen gebildet werden, und x der Reihe nach gleich $\frac{x}{q^{\lambda-n}}$, $\frac{x}{q^{\lambda-n+1}}$ u. s. f. resp. gleich $\frac{x}{q^{\lambda-n+1}}$, $\frac{x}{q^{\lambda-n+2}}\dots$ u. s. w. gesetzt wird, können wir für *(1)* schreiben:

$$\overset{hq^n}{\underset{h}{S}}\varphi(uq^{\lambda-n})\,\frac{q^{\lambda-n}-1}{q-1}\,\frac{Ux^{\lambda-1}p\left(\lambda-1,q,\frac{uq}{x}\right)}{(uq^{\lambda-1}-x)\dots(uq^{\lambda-n}-x)}\,\frac{\Delta u}{u(q-1)}+\overset{hq^n}{\underset{h}{S}}\psi(uq^{\lambda-n})\,\frac{Ux^{\lambda-1}p\left(\lambda-1,q,\frac{uq}{x}\right)}{(uq^{\lambda-1}-x)\dots(uq^{\lambda-n+1}-x)}\,\frac{\Delta u}{u(q-1)}.$$

Bezeichnet nun V eine Funktion von u allein, so ist nach der Formel:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=\frac{v\,\Delta u}{\Delta x}+\frac{u\,\Delta v}{\Delta x}-x(q-1)\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta}{\Delta u}\left\{\frac{Vx^{\lambda-1}p\left(\lambda-1,q,\frac{uq}{x}\right)(u-x)}{(uq^{\lambda-1}-x)(uq^{\lambda-2}-x)\dots(uq^{\lambda-n}-x)}\right\}=\frac{Vx^{\lambda-1}p\left(\lambda-1,q,\frac{uq}{x}\right)}{(uq^{\lambda-1}-x)\dots(uq^{\lambda-n}-x)}\,\frac{(q^{\lambda-n}-1)}{q-1}+\frac{\Delta V}{\Delta u}\,\frac{x^{\lambda-1}p\left(\lambda-1,q,\frac{uq}{x}\right)}{(uq^{\lambda-1}-x)\dots(uq^{\lambda-n+1}-x)}.$$

Wird die Funktion V so bestimmt, dass:

$$V=U\varphi(uq^{\lambda-n})$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta u}=U\psi(uq^{\lambda-n}).$$

oder:

$$V(uq)=\frac{\varphi(uq^{\lambda-n})+u(q-1)\psi(uq^{\lambda-n})}{\varphi(uq^{\lambda-n})}$$

$$=\frac{(1-q^{a_1}u)(1-q^{a_2}u)\dots\dots(1-q^{a_{n-1}}u)}{(1-q^{-b_1+a_1}u)(1-q^{-b_2+a_2}u)\dots\dots(1-q^{-b_{n-1}+a_{n-1}}u)}\,q^bV(u)$$

$$V = u^b \frac{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u)}{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu + \alpha_\nu, q, u)}$$

ist, so muss auch:

$$\frac{\varphi(u q^{\lambda-n})(q^{\lambda-n} - 1)\, U x^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)}{(q - 1)(u q^{\lambda-1} - x) \ldots . (u q^{\lambda-n} - x)} + \frac{\psi(u q^{\lambda-n})\, U x^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)}{(u q^{\lambda-1} - x) \ldots\ldots (u q^{\lambda-n} - x)}$$

$$= \frac{V x^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)\frac{q^{\lambda-n} - 1}{q - 1}}{(u q^{\lambda-1} - x)(u q^{\lambda-2} - x) \ldots (u q^{\lambda-n} - x)}\, u(q - 1) + \frac{\frac{\Delta V x^{\lambda-1}}{\Delta u}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)}{(u q^{\lambda-1} - x) \ldots (u q^{\lambda-n} - x)}\, u(q - 1) = \Delta \left\{ \frac{V x^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)(u - x)}{(u q^{\lambda-1} - x) \ldots\ldots (u q^{\lambda-n} - x)} \right\}.$$

sein. Unsere Differenzengleichung geht demnach über in:

$$\mathop{S}_{h}^{h q^n} \Delta \left\{ \frac{V x^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)(u - x)}{(u q^{\lambda-1} - x) \ldots\ldots (u q^{\lambda-n} - x)} \right\} \frac{\Delta u}{u(q - 1)} = 0.$$

Nach der Formel 2 der Einleitung ist aber:

$$\mathop{S}_{u}^{u q^n} f(u) \frac{\Delta u}{u(q - 1)} = \sum_{0}^{n-1}{}^{\nu} f(u q^{\nu}); \text{ also: } \mathop{S}_{u}^{u q^n} \Delta(f u) \frac{\Delta u}{u(q - 1)} = \mathop{S}_{u}^{u q^n} \{f(uq) - f(u)\} \frac{\Delta u}{u(q - 1)} = \sum_{0}^{n-1}{}^{\nu} f(u q^{\nu+1}) - f(u q^{\nu}) =$$

$$= f(u q^n) - f(u q).$$

Demnach reducirt sich die Differenzengleichung auf den Ausdruck:

$$\left[\frac{V x^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)(u - x)}{(u q^{\lambda-1} - x) \ldots\ldots (u q^{\lambda-n} - x)} \right]_{(u = h q^n)} - \left[\frac{V x^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q}{x}\right)(u - x)}{(u q^{\lambda-1} - x) \ldots\ldots (u q^{\lambda-n} - x)} \right]_{(u = q)} = 0.$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn jeder der Klammerausdrücke für die entsprechende Grenze verschwindet. Dies geschieht aber, wenn $h = q^{b_\nu - a_\nu - \mu}$ oder $h = x q^{-\mu}$ und $n = \infty$ ist, unter der Voraussetzung $mod\,(q^b) < 1$. Alle diese Fälle, in denen μ eine ganze Zahl sein muss, reduciren sich wegen des Verschwindens entsprechender Glieder der Summe, auf die zwei Fälle $h = q^{b_\nu - a_\nu}$ und $h = x$.

Da nun:

$$U = u^b \frac{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u)}{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu + \alpha_\nu, q, u)} \cdot \frac{u(a - 1)}{\varphi(u q^{\lambda-n})} = u^b \frac{\prod\limits_{1}^{n-1} p(\alpha_\nu, q, u)(a - 1)}{\prod\limits_{1}^{n-1} p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u)}$$

ist, so haben unsere Betrachtungen folgende Summen als Lösungen der Differenzengleichung 1 ergeben:

$$6)\quad \begin{cases} K_{b_\mu - a_\mu} = x^{\lambda-1} \mathop{S}\limits_{q^{b_\mu - a_\mu}}^{q^\infty} u^b \dfrac{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u)}{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u)}\, p\left(\lambda - 1, q, \dfrac{u q}{x}\right) \dfrac{\Delta u}{u(q - 1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \mu = 1, 2, \ldots n - 1 \\ K_x = \mathop{S}\limits_{x}^{x q^\infty} u^b \dfrac{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u)}{\prod\limits_{1}^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u)}\, x^{\lambda-1} p\left(\lambda - 1, q, \dfrac{u q}{x}\right) \dfrac{\Delta u}{u(q - 1)}. \end{cases}$$

Wird nun beachtet, dass die Rechnung ganz ebenso verläuft, wenn in der Summe 3 an Stelle von $x^{\lambda-1} p\left(\lambda - 1, q, \frac{u\,q}{x}\right)$ der Ausdruck $x^{\lambda-1} \pi\left(\lambda - 1, q, \frac{u\,q}{x}\right)$, in der Gleichung 5 an Stelle von:

$$V = u^b \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\,(\alpha_\nu, q, u)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\,(-b_\nu + \alpha_\nu, q, u)}$$

die Grösse:

$$V^1 = u^b \frac{\prod_1^{n-1}{}_\nu\, \pi\,(\alpha_\nu, q, u)}{\prod_1^{n-1} \pi\,(-b_\nu + \alpha_\nu, q, u)} \qquad \text{genommen wird,}$$

da $p\,(\alpha, q, x)$ und $\pi\,(\alpha, q, x)$ derselben Differenzengleichung 1. Ordnung Genüge leisten. Nimmt man gleichzeitig als untere Grenze $h = q^{\alpha_\nu}$ resp. $h = q\,x^{n-\lambda+1}$ als obere Grenze $h\,q^n\,(n = -\infty)$, für welche Grenze der Ausdruck:

$$u^b \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(\alpha_\nu, q, u)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, u, q)} \qquad \frac{x^{\lambda-1}\, \pi\left(\lambda - 1, q\,\frac{u\,q}{x}\right)(u - x)}{(u\,q - x)^{\lambda-1} \ldots\ldots (u\,q - x)^{\lambda-n}}$$

verschwindet, wenn $mod\,(q^0) < 1$ ist, so ergeben sich als weitere Lösungen:

$$6)\quad \begin{cases} K_{\alpha_\mu} = \mathop{S}\limits_{q^{\alpha_\mu}}^{q^{-\infty}} u^b \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(\alpha_\nu, q, u)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u)}\; x^{\lambda-1}\, \pi\left(\lambda - 1, q, \dfrac{u\,q}{x}\right) \dfrac{\Delta u}{u\,(q-1)} \quad \mu = 1, 2, \ldots n - 1. \\[2ex] K_{x\,q^{n-\lambda+1}} = \mathop{S}\limits_{x\,q^{n-\lambda+1}}^{q^{-\infty}} u^b \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(\alpha_\nu, q, u)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u)}\; x^{\lambda-1}\, \pi\left(\lambda - 1, q, \dfrac{u\,q}{x}\right) \dfrac{\Delta u}{u\,(q-1)}. \\[2ex] \qquad = \mathop{S}\limits_{x\,q^{-\lambda}}^{q^{-\infty}} u^b \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(\alpha_\nu, q, u)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \pi\,(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u)}\; x^{\lambda-1}\, \pi\left(\lambda - 1, q, \dfrac{u\,q}{x}\right) \dfrac{\Delta u}{u\,(q-1)}. \end{cases}$$

Mit Benutzung der Relation:

$$\pi\,(\alpha, q, x) = (-x)^\alpha\, p\left(\alpha, q, \frac{1}{x\,q^{\alpha-1}}\right)$$

bringen wir diese Summen auf folgende Form:

$$K_{\alpha\mu} = \mathop{S}\limits_{q^{-\alpha\mu}}^{q^{-\infty}} u^b \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(\alpha_\nu, q, \frac{1}{u\,q^{\alpha_\nu - 1}}\right)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, \frac{1}{u\,q^{-b_\nu + \alpha_\nu}}\right)} (-1)^{-1+b_\nu}\, u^{b_\nu - 1} (-1)^{\lambda-1} (u\,q)^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{x}{u\,q^{\lambda-1}}\right) \frac{\Delta u}{u\,(q-1)}$$

$$K_{x\,q^{n-\lambda+1}} = \mathop{S}\limits_{x\,q^{-\lambda}}^{q^{-\infty}} u^b \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(\alpha_\nu, q, \frac{1}{u\,q^{\alpha_\nu - 1}}\right)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, \frac{1}{u\,q^{-b_\nu + \alpha_\nu}}\right)} (-1)^{-1+b_\nu}\, u^{b_\nu - 1} (-1)^{\lambda-1} (u\,q)^{\lambda-1}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{x}{u\,q^{\lambda-1}}\right) \frac{\Delta u}{u\,(q-1)}.$$

Wir formen die Summen dadurch weiter um, dass wir an Stelle von $\mathop{S}\limits_h^{h\,q^n} f\,(u) \frac{\Delta u}{u\,(q-1)}$ $\mathop{S}\limits_1^{q^n} f\,(u\,h) \frac{\Delta u}{u\,(q-1)}$ und an Stelle von $\mathop{S}\limits_1^{q^{-n}} f\,u \frac{\Delta u}{u\,(q-1)}$ den Ausdruck $q \mathop{S}\limits_1^{q^n} f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{\Delta u}{u\,(q-1)}$ setzen. Dadurch erhalten wir die 2 n Integrale als bestimmte Summen mit den Grenzen 1 und q^∞:

$$
7)\quad \left\{
\begin{aligned}
K_{b_\mu - a_\mu} &= q^{b(b_\mu - a_\mu)}\, x^{\lambda-1} \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^b \frac{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(\alpha_\nu, q, uq^{b_\mu - a_\mu})}{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, uq^{b_\mu - a_\mu})}\, p\left(\lambda - 1, q, \frac{uq^{1+b_\mu - a_\mu}}{x}\right) \frac{\Delta u}{u(q-1)}\,.\ \mu = 1, 2, \ldots n-1.\\
K_x &= x^{b+\lambda-1} \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^b \frac{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(\alpha_\nu, q, ux)}{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, ux)}\, p(\lambda-1, q, uq) \frac{\Delta u}{u(q-1)}.\\
K_{a_\mu} &= (-1)^{-\sigma-b}\, q^{a_\mu+\lambda} \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^\sigma \frac{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(b_\nu - \alpha_\nu - 1, q, uq^{1+a_\mu})}{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(-\alpha_\nu, q, uq^{1+a_\nu})}\, p(\lambda-1, q, uxq^{1-\lambda+a_\mu} \frac{\Delta u}{u(q-1)}\,.\ \mu = 1, 2, \ldots n-1.\\
K_{xq^{n-\lambda+1}} &= (-1)^{-\sigma-b}\, q^{\lambda\sigma+\lambda}\, x^{-\sigma} \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^\sigma \frac{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(b_\nu - \alpha_\nu - 1, q, \frac{u}{x} q^{1+\lambda})}{\prod\limits_1^{n-1}{}_{(\nu)}\, p(-\alpha_\nu, q, \frac{u}{x} q^{1+\lambda})}\, p(\lambda-1, q, uq) \frac{\Delta u}{u(q-1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Summen convergiren, wenn in ihnen *mod* (q^b), bez. *mod* $(q^\sigma) < 1$ ist. Da die Funktion $p(\alpha_\nu, q, ux)$ für alle Werte $q = 1, q \ldots q^\infty$ endlich und eindeutig bleibt, wenn *mod* $(x) <$ *mod* $(q^{-\alpha_\nu})$ ist, so bleibt:

$K_x\, x^{1-b-\lambda}$ für alle x, deren Modul kleiner ist als der Modul jeder der Grössen

$$q^{-a_1}\ q^{-a_2}\ \ldots\ q^{-a_{n-1}}\ ,$$

K_{a_μ} für alle x, deren Modul kleiner ist als *mod* (q^{-a_μ})

$K_{xq^{n-\lambda+1}}\, x^\sigma$ für alle x, deren Modul grösser ist als der Modul jeder der Grössen

$$q^{\lambda+b_1-a_1}\ q^{\lambda+b_2-a_2}\ \ldots\ q^{\lambda+b_{n-1}-a_{n-1}}$$

$K_{b_\mu - a_\mu}\, x^{1-\lambda}$ für alle x, deren Modul grösser ist als *mod* $(q^{\lambda+b_\mu-a_\mu})$,

eindeutig und endlich. Sie bilden also innerhalb des betreffenden Bezirks Lösungen der Differenzengleichung von den Eigenschaften der entsprechenden Funktionen $H_n^{10}\ H_n^{20} \ldots H_n^{n0}, H_n^{1\infty}\ H_n^{2\infty} \ldots H_n^{n\infty}$.

Da ferner $p(\alpha_\nu, q, ux)$ für $u = 1\, q \ldots q^n$ und für alle x die von ∞ verschieden sind, eindeutig bleibt und nur dann unendlich wird, und zwar von der 1. Ordnung, wenn ux einer der Grössen der Punktfolge $q^{-\alpha_\nu}$ gleich wird, so bleibt auch K_x in dem ganzen Bereich der x, die von o und ∞ verschieden sind, eindeutig und wird nur in der Punktfolge $q^{-\alpha_\nu}$ unendlich, und zwar von der 1. Ordnung: K_x hat also in diesem Bereich die Eigenschaften von H_n^b. Ebenso hat K_{a_μ} die Eigenschaften von $H_n^{a_1}\ H_n^{a_2} \ldots H_n^{a_{n-1}}$, $K_{b_\mu - a_\mu}$ die von $H_n^{-b_1} \ldots H^{-b_{n-1}}$ und $K_{xq^{n-\lambda+1}}$ die von H_n^{-a}, wo unter den Grössen $H_n^{-b_\nu}$ *) Funktionen verstanden werden die nur in der conjugirten Punktfolge $q^{\lambda+b_\nu-a_\nu-1}$ unendlich gross von der 1. Ordnung werden, und unter H_n^{-a} eine solche, die in den sämmtlichen Punktfolgen $q^{\lambda+b_\nu-a_\nu-1}$ unendlich gross von der 1. Ordnung wird. Sie bleiben aber sämmtlich im Übrigen ausser für $x = o$ und $x = \infty$ eindeutig und stetig.

Für die Grössen $H_n^{b_\mu}$ und H_n^a einfache Entwickelungen zu finden, ist mir nicht gelungen. Dieselben lassen sich aber aus den Summen K_{a_μ} und K_x oder aus den ihnen in der Umgebung des Punktes $x = o$ entsprechenden convergenten Potenzreihen, die unten entwickelt werden sollen,

---

*) Die Erkenntniss dieser Zweige $H_n^{-b_\nu}$ H_n^{-a} verdanke ich der Abh. *Thomae:* Cr. J. Bd. 84.

unter Zuhülfenahme der Recursionsformel 2 Art. 2 zusammensetzen, nach einer Methode, die Herr *Thomae* Cr. J. 70 pag. 269, und *Brioschi* Ann. T. IV. 2. p. 114 angewandt hat.

Es sei nämlich:

$$y^{b\mu}(x) = C_1 K_{\alpha_1} + C_2 K_{\alpha_2} + . \quad + C_{n-1} K_{\alpha_{n-1}} + C_n K_x \,.$$

Man bestimme die Verhältnisse der Constanten C_ν so, dass $y^{b\mu}(x)$ in den $n-1$ Punkten:

$$q^{b\mu - \alpha_\mu + \lambda - 1}, \; q^{b\mu - \alpha_\mu + \lambda - 2}, \; \ldots \; q^{b\mu - \alpha_\mu + \lambda - n + 1}$$

verschwindet. Dann ist $y^{b\mu}(x)$ eine Lösung der Differenzengleichung 1 mit den Eigenschaften der Funktion $H_n^{b\mu}(x)$.

Führt man nämlich die so bestimmte Funktion $y^{b\mu}(x)$ in die Recursionsformel 2 Art. 2 ein und setzt $q^{-n+b_\mu-\alpha_\mu+\lambda}$ für x, so verschwindet der Faktor von $y^{b\mu}(x q^n)$ und die Gleichung reducirt sich auf:

$$C_0 \prod_1^{n-1}(\nu) \left(1 - q^{-n+b_\mu-\alpha_\mu+\alpha_\nu+\lambda}\right) y^{b_\mu}\left(q^{-n+b_\mu-\alpha_\mu+\lambda}\right) = o$$

woraus folgt, dass y^{b_μ} auch für $x = q^{-n+b_\mu-\alpha_\mu+\lambda}$ verschwindet. Indem man nun für x der Reihe nach $q^{-n+b_\mu-\alpha_\mu+\lambda-1}$, $q^{-n+b_\mu-\alpha_\mu+\lambda-2}$ u. s. f. substituirt, folgert man aus derselben Gleichung, dass $y^{b_\mu}(x)$ für alle diese Werte verschwindet.

Es wird ferner vorausgesetzt, dass $mod\,(q^{-\alpha_1})$ die kleinste der Grössen $mod\,(q^{-\alpha_1})$, $mod\,(q^{-\alpha_2})$ ....., $mod\,(q^{-\alpha_{n-1}})$ ist, dass ferner:

$$mod\,(q^{-\alpha_1-n_\nu}) > mod\,(q^{-\alpha_\nu}) \,.$$
$$mod\,(q^{-\alpha_1-n_\nu-1}) > mod\,(q^{-\alpha_\nu}) \,,$$

ist, wo den ganzen Zahlen $n_1\, n_2 \ldots n_{n-1}\, n_\mu > n_\nu$ sein soll, wenn $\mu > \nu$ ist. Setzen wir dann irgend eine Lösung der Differenzengleichung, welche für alle x, deren Modul kleiner als $mod\,(q^{-\alpha_1})$ ist, ausgenommen $x = o$, endlich bleibt, etwa $y^{b\mu}(x)$, in die Recursionsformel 2. Artikel 2 ein, so müssen wir aus der Gleichung:

$$y^{b\mu}(x) = \frac{\sum_1^n \nu \; \varphi_{n-1}^{\nu}(x)\, y^{\mu}(x q^{\nu})}{C_0 \prod_1^{n-1}(\nu)\left(1 - x q^{\alpha_\nu}\right)}$$

schliessen, wenn darin für x ein Wert gesetzt wird, dessen Modul grösser als $mod\,(q^{-\alpha_\nu})$ ist, dass $y^{b_\mu}(x)$ auch endlich bleibt, so lange $mod\,(x) < mod\,(q^{-\alpha_1-1})$ ist, ausser für $x = o$ und $x = q^{-\alpha_1}$, und dass es in dem Punkte $x = q^{-\alpha_1}$ unendlich wird, wie die erste Potenz. Weiter folgt aus derselben Gleichung, wenn darin statt x eine Grösse eingeführt wird, deren Modul grösser als $mod\,(q^{-\alpha_1-1})$ ist, dass $y^{b_\mu}(x)$ ausser für $x = o$, $x = q^{-\alpha_1}$, $x = q^{-\alpha_1-1}$ für alle x, deren Modul kleiner als $mod\,(q^{-\alpha_1-2})$ ist, endlich bleibt. Demnach wird $y^{b\nu}(x)$ in dem mit dem Radius $mod\,(q^{-\alpha_1-n_2})$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreise ausser für $x = o$ nur in den Punkten $q^{\alpha_1} \ldots q^{-\alpha_1-n_2+1}$ unendlich gross und zwar von der 1. Ordnung. Ersetzen wir jetzt x in obiger Gleichung durch Werte, deren Modul grösser als $mod\,(q^{-\alpha_1-n_2})$ ist, so ergiebt sich, dass wenn x die Werte durchläuft von $q^{-\alpha_1-n_2}$ bis $q^{-\alpha_1-n_2-1}$, $y^{b_\mu}(x)$ nur unendlich werden kann in den Punkten $q^{-\alpha_1-n_2}$ und q^{α_2} und auch hier nur von der 1. Ordnung.

Allgemein gilt der Satz: Wird $y^{b_\mu}(x)$ in dem Ringgebiet, in dem $mod\,(x) > mod\,(q^{\varkappa})$ und $< mod\,(q^{\varkappa-1})$ ist, nur unendlich in den Punkten $q^{\lambda_1} q^{\lambda_2} \dots q^{\lambda_\tau}$ und zwar von der 1. Ordnung und verschwindet der Nenner $C_0 \overset{n-1}{\underset{1}{\Pi}}(\nu)\,(1 - x\,q^{a_\nu})$ für kein anderes x zwischen $mod\,(x) > mod\,(q^{\varkappa-1})$ und $mod\,(x) > mod\,(q^{\varkappa-2})$ als für $x = q^{\lambda_{\tau+1}}, \dots q^{\lambda_{\tau+2}}, \dots q^{\lambda_{\tau+\sigma}}$ und zwar von der 1. Ordnung, so wird $y^{b_\mu}(x)$ in dem Ringgebiet, das durch die Bedingung bestimmt ist:

$$mod\,(x) > mod\,(q^{\varkappa-1}) \text{ und } < mod\,(q^{\varkappa-2})$$

nur unendlich in den Punkten $q^{\lambda_1 - 1}, q^{\lambda_2 - 1}, \dots q^{\lambda_\tau - 1}\; q^{\lambda_{\tau+1}} \dots q^{\lambda_{\tau+\sigma}}$ und zwar von der 1. Ordnung. Es folgt daraus, dass $y^{b_\mu}(x)$ ausser für $x = o$ nur in den Punktfolgen $q^{-a_1}, q^{-a_2}, \dots\dots q^{-a_{n-1}}$ unendlich wird, und zwar von der 1. Ordnung. Es hat daher $y^{b_\mu}(x)$ die Eigenschaften von $H_n^{b_\mu}(x)$.

Werden in dem Ausdruck:

$$y^{a} = q_1\,K_{a_1} + q_2\,K_{a_2} + \dots \quad + q_{n-1}\,K_{a_{n-1}} + q_n\,K_x$$

die Verhältnisse der Constanten so bestimmt, dass y^{a} unendlich bleibt für $x = q^{-a_1}, q^{-a_2}, \dots q^{-a_{n-1}}$, so muss y^{a} ausser für $x = o$ und $x = \infty$ überall endlich und eindeutig sein.

Aus den Untersuchungen dieses Artikels und dem Satz I der Einleitung geht hervor, dass die Eigenschaften des Art. 1 eine Funktion nicht mehr beschränken, als die Differenzengleichung 1. Nur ist für die Differenzengleichung die Bedingung 5, über die Grössen $b + \lambda - 1$ u. s. w. nicht notwendig, während für diesen Fall die Eigenschaften unter 3 und 4 nicht mehr bestehen.

Es ist nun leicht einzusehen, dass ausser den schon erwähnten, nicht in der Definition enthaltenen Lösungen der Differenzengleichung $H_n^{-b_1}$, $H_n^{-b_2}$, ... $H_n^{-b_{n-1}}$, H_n^{-a}, sich aus den Summen $K_{b_\mu - a_\mu}$, $K_{x q^{n} - \lambda + 1}$, n weitere Lösungen zusammensetzen lassen, in ähnlicher Weise, wie $H_n^{b_1}$, $H_n^{b_2}$, ... $H^{b_{n-1}}$, H_n^{a} aus K_{a_μ}, K_x gebildet wurden, nämlich:

1) H_n^{-b}, das ausser für $x = o$ und $x = \infty$ nirgends unendlich noch vieldeutig wird und das dargestellt wird durch:

$$d_1\,H_n^{1\infty} + d_2\,H_n^{2\infty} + \dots + d_n\,H_n^{n\infty},$$

wenn die Verhältnisse der Constanten so bestimmt sind, dass der Ausdruck für keinen der Werte $x = q^{b_1 - a_1 + \lambda}$, $x = q^{b_2 - a_2 + \lambda}$, ... $x = q^{b_{n-1} - a_{n-1} + \lambda}$ unendlich gross wird.

2) $H_n^{-a_1}$, $H_n^{-a_2}$, ... $H_n^{-a_{n-1}}$, die bez. in den conjugirten Punktreihen q^{-a_1}, q^{-a_2} ... $q^{-a_{n-1}}$ unendlich klein von der 1. Ordnung, und sämmtlich in den conjugirten Punktreihen $q^{b_\mu - a_\mu + \lambda - 1}$ $(\mu = 1\,2 \dots n - 1)$ von der 1. Ordnung unendlich gross werden, sonst aber ausser für $x = o$ und $x = \infty$ eindeutig und endlich bleiben. Ein Ausdruck:

$$e_1\,H_n^{1\infty} + e_2\,H_n^{2\infty} + \dots + e_n\,H_n^{n\infty},$$

in welchem die Verhältnisse der Constanten $e_1\,e_2 \dots e_n$ so bestimmt sind, dass er für $x = q^{-a_\nu + 1}$, .. $q^{-a_\nu + n - 1}$ verschwindet, hat die Eigenschaften von $H_n^{-a_\nu}$.

Aus der Methode, in der die Differenzengleichung 1 in Art. 2 aus den Eigenschaften der Funktion $H_n\,(x)$ abgeleitet ist, geht hervor, dass die Bedingung, $H_n\,(x)$ sei darstellbar in den Formen:

$$k_{b_1} H_n^{b_1} + k_{b_2} H_n^{b_2} + \ldots + k_{b_{n-1}} H_n^{b_{n-1}} + k_b H_n^b ,$$

$$k_{a_1} H_n^{a_1} + k_{a_2} H_n^{a_2} + \ldots + k_{a_{n-1}} H_n^{a_{n-1}} + k_a H_n^a .$$

hätte ersetzt werden können durch die Bedingung, dass die Funktion H_n darstellbar sei durch:

$$k_{-b_1} H_n^{-b_1} + k_{-b_2} H_n^{-b_2} + \ldots + k_{-b_{n-1}} H_n^{-b_{n-1}} + k_{-b} H_n^{-b}$$

$$k_{-a_1} H_n^{-a_1} + k_{-a_2} H_n^{-a_2} + \ldots + k_{-a_{n-1}} H_n^{-a_{n-1}} + k_{-a} H_n^{-a} .$$

Die eine Eigenschaft ist eine Consequenz der anderen und der sonstigen Eigenschaften der Funktion $H_n (x)$.

Aus diesen Betrachtungen folgt die Gleichung:

$$H_n \left(b \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \end{matrix} \lambda, q, x\right) =$$

$$H_n \left(b \begin{matrix} b_1 - a_1 + \lambda, & b_2 - a_2 - + \lambda, & \ldots & b_{n-1} - a_{n-1} + \lambda \\ b_1 & b_2 & & b_{n-1} \end{matrix} \lambda, \frac{1}{q}, x\right).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichung 8 Art. 1 ist man im Stande aus K_x und K_{a_μ} die Lösungen $K_{x q^{n-\lambda+1}}$ und $K_{b_\mu - a_\mu}$ abzuleiten.

Art. 4.

Von der Summe $K_x \, x^{1-b-\lambda}$ ist bewiesen, dass sie in der Umgebung des Punktes $x = o$, das heisst für alle x, deren Modul kleiner ist, als der Modul jeder der Grössen $q^{-a_1} \, . \, . \, q^{-a_{n-1}}$, eindeutig und stetig sei. Sie muss also in eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe entwickelbar sein, die innerhalb des erwähnten Gebietes convergent ist, nach dem Satze, dass jede Funktion, in dem Gebiete, in dem sie endlich und eindeutig ist, convergent entwickelbar ist. Wir erhalten die Reihen, indem wir in K_x jede der p Funktionen, welche von x abhängt durch ihre entsprechende Reihenentwickelung ersetsen. Es sei:

$$7) \left\{ \begin{aligned} & \overset{n-1}{\underset{1}{\Pi}}{}^{(\nu)} \frac{p(a_\nu, q, u x)}{p(-b_\nu + a_\nu + 1, q, u x)} = \sum_0^\infty k \, C_k \, x^k \, u^k . \\ & \frac{p(a_\nu, q, u x)}{p(-b_\nu + a_\nu + 1, q, u x)} = p(b_\nu - 1, q, u x q^{1-b_\nu+a_\nu}) = \sum_0^\infty k \, C_k^\nu \, x^k \, u^k . \end{aligned} \right.$$

Dann ist:

$$C_k^\nu = (q^{a_\nu})^k \frac{(1 - q^{1-b_\nu})(1 - q^{2-b_\nu}) \ldots (1 - q^{k-b_\nu})}{(1 - q) \quad (1 - q^2) \ldots \ldots (1 - q^k)} .$$

$$C_k = \sum_{m_1 m_2 \ldots m_{n-1}} C_k^\nu ,$$

wo die Summe über alle ganzzahligen Werte von $m_1 \, m_2 \, . \, . \, m_{n-1}$ erstreckt werden muss, welche der Bedingung genügen:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} = k .$$

Es ist demnach:

$$
8)\left\{\begin{aligned}
C_1 &= q^{\alpha_1}\,\frac{1-q^{1-b_1}}{1-q} + q^{\alpha_2}\,\frac{1-q^{1-b_2}}{1-q} + \ldots \qquad + q^{\alpha_{n-1}}\,\frac{1-q^{1-b_{n-1}}}{1-q}.\\
C_2 &= q^{\alpha_1 2}\frac{(1-q^{1-b_1})(1-q^{2-b_1})}{(1-q)(1-q^2)} + q^{\alpha_2 2}\frac{(1-q^{1-b_2})(1-q^{2-b_2})}{(1-q)(1-q^2)} + \ldots + q^{\alpha_{n-1}2}\frac{(1-q^{1-b_{n-1}})(1-q^{2-b_{n-1}})}{(1-q)(1-q^2)}.\\
&+ q^{\alpha_1+\alpha_2}\frac{(1-q^{1-b_1})(1-q^{1-b_2})}{(1-q)(1-q)} + q^{\alpha_1+\alpha_3}\frac{(1-q^{1-b_1})(1-q^{1-b_3})}{(1-q)(1-q)} + \ldots + q^{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}}\frac{(1-q^{1-b_{n-1}})(1-q^{1-b_{n-2}})}{(1-q)(1-q)}.\\
C_k &= \sum_{m_1 m_2 \ldots m_{n-1}} \frac{(1-q^{1-b_1})\ldots(1-q^{m_1-b_1})}{(1-q)\;\ldots\;(1-q^{m_1})}\ldots\frac{(1-q^{1-b_{n-1}})\ldots(1-q^{m_{n-1}-b_{n-1}})}{(1-q)\ldots(1-q^{m_{n-1}})}\,q^{\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\ldots+\alpha_{n-1}m_{n-1}}.
\end{aligned}\right.
$$

Werden diese Ausdrücke in K_x eingesetzt, so ergiebt sich:

$$
\frac{K_x}{x^{b+\lambda-1}} = \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^b\, p(\lambda-1, q, uq)\frac{\Delta u}{u(q-1)}\{1 + C_1 u x + C_2 u^2 x^2 + \ldots\}.
$$

$$
= \sum_0^\infty{}_k\, x^k\, C_k \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^{b+k}\, p(\lambda-1, q, uq)\frac{\Delta u}{u(q-1)}
$$

$$
= \sum_0^\infty{}_k\, x^k\, C_k\,\frac{\Pi(\lambda-1,q)\;\Pi(b+k-1,q)}{\Pi(b+\lambda+k-1,q)}
$$

$$
8)\left\{\begin{aligned}
&= \frac{\Pi(\lambda-1,q)\;\Pi(b-1,q)}{\Pi(b+\lambda-1,q)}\sum_0^\infty{}_k\, x^k\, C_k\,\frac{(1-q^b)(1-q^{b+1})\ldots(1-q^{b+k-1})}{(1-q^{b+\lambda})(1-q^{b+\lambda+1})\ldots(1-q^{b+\lambda+k-1})}.\\
&\text{Diesen Ausdruck bezeichnen wir durch:}\\
&\frac{K_x}{x^{b+\lambda-1}} = \frac{\Pi(\lambda-1,q)\;\Pi(b-1,q)}{\Pi(b+\lambda-1,q)}\,F_n\left(b\,\begin{matrix}\alpha_1\;\alpha_2\;\ldots\;\alpha_{n-1}\\ b_1\;b_2\;\ldots\;b_{n-1}\end{matrix}\;\lambda, q, x\right).
\end{aligned}\right.
$$

Die Reihe $x^{b+\lambda-1}F_n$ genügt der Differenzengleichung 1 und bildet innerhalb ihres Convergenzgebietes eine Darstellung der Funktion $H_n^{n0}(x)$. In Bezug auf die Constante b umfasst die Reihe F_n ein grösseres Wertgebiet als die Summe $K_x . F_n$ wird nur dann illusorisch, wenn $b+\lambda$ eine negative ganze Zahl oder Null ist. In diesem Fall nähert sich nämlich das Produkt:

$$
(1-q^{b+\lambda})(1-q^{b+\lambda+1})\ldots(1-q^{b+\lambda+n})
$$

mit wachsendem n der Grenze o, in allen anderen Fällen dagegen einer von Null verschiedenen endlichen Grösse. (Cr. J. B. 34. Abhandlung von *Heine* pag. 304.)

Die Reihe F_n bleibt ungeändert, wenn $x q^\varepsilon$ statt x und gleichzeitig $\alpha_\nu - \varepsilon$ an Stelle von $\alpha_\nu\,(\nu = 1, 2\,..\,n-1)$ gesetzt wird. Ferner können die Indicespaare $(\alpha_\nu\, b_\nu)$ und $(\alpha_\mu\, b_\mu)$ beliebig unter einander vertauscht werden, und in der unteren Indicesreihe kann $b_\nu - \alpha_\nu + \alpha_\mu$ an Stelle von b_μ treten, wenn gleichzeitig b_ν durch $b_\mu - \alpha_\mu + \alpha_\nu$ ersetzt wird. Einerseits folgt dieser Satz aus der Definition der Funktion H_n Art. 1. Andrerseits ergiebt er sich aus der Gleichung 7, da in derselben nicht nur:

$$
\frac{p(\alpha_\mu, q, u x)}{p(-b_\mu+\alpha_\mu+1, q, u x)} = p(b_\mu-1, q, u x q^{-b_\mu+\alpha_\mu+1}).\quad \frac{p(\alpha_\nu, q, u x)}{p(-b_\nu+\alpha_\nu+1, q, u x)} = p(b_\nu-1, q, u x q^{-b_\nu+\alpha_\nu+1})
$$

sondern auch:

$$
\frac{p(\alpha_\mu, q, u x)}{p(-b_\nu+\alpha_\nu+1, q, u x)} = p(b_\nu+\alpha_\mu-\alpha_\nu-1, q, u x q^{-b_\nu+\alpha_\nu+1});\quad p\frac{(\alpha_\nu, q, u x)}{(-b_\mu+\alpha_\mu+1, q, u x)} = p(b_\mu+\alpha_\nu-\alpha_\mu-1, q, u x q^{-b_\mu+\alpha_\mu+1})
$$

gesetzt werden kann.

Für $H_n^{n\infty}$ findet man in analoger Weise die folgende Reihenentwickelung:

$$
9)\quad K_{x q^{n-\lambda+1}} = (-1)^{-\sigma-b}\, q^{\lambda\sigma+\lambda}\,\frac{\Pi(\sigma-1,q)\;\Pi(\lambda-1,q)}{\Pi(\sigma+\lambda-1,q)}\,x^{-\sigma}\,F_n\left(\sigma\,\begin{matrix}b_1-\alpha_1-1\;\; b_2-\alpha_2-1\;\ldots\; b_{n-1}-\alpha_{n-1}-1\\ b_1\;\; b_2\;\ldots\; b_{n-1}\end{matrix}\;\lambda, q, \frac{q^{\lambda+1}}{x}\right)
$$

Für die Summen K_{a_μ} und $K_{b_\mu - a_\mu}$ ergeben sich Reihen, welche von den soeben entwickelten wesentlich verschieden sind. Es treten nämlich von $n = 3$ an unendliche Reihen als Coefficienten der einzelnen Potenzen von x auf, Reihen, welche für die $n-1$. Ordnung als Funktionen gewisser Constanten betrachtet, ebenso aufgebaut sind, wie $F_n(x)$ für die n. Ordnung als Funktion von x.

Setzt man nämlich in $K_{b_\mu - a_\mu}$ für $p(\lambda - 1, q\frac{u q^{1-b_\mu-a_\mu}}{x})$ die Reihe:

$$\sum_0^\infty {}_k (q^{\lambda+b_\mu-a_\mu})^k \left(\frac{u}{x}\right)^k \frac{(1-q^{1-\lambda}) \ldots (1-q^{k-\lambda})}{(1-q)\ldots(1-q^k)}$$

ein, so erhält man:

$$q^{-b(b_\mu-a_\mu)} K_{b_\mu-a_\mu} = x^{\lambda-1} \sum_0^\infty {}_k \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^{b+k} \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u q^{b_\mu-a_\mu})}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu+\alpha_\nu+1, q, u q^{b_\mu-a_\mu})} \left(\frac{q^{\lambda+b_\mu-a_\mu}}{x}\right)^k \frac{(1-q^{1-\lambda})\ldots(1-q^{k-\lambda})}{(1-q)\ldots(1-q^k)}$$

$$10 \quad = \frac{\Pi(b-1,q)\,\Pi(b_\mu-1,q)}{\Pi(b+b_\mu-1,q)} x^{\lambda-1} \sum_0^\infty {}_k \left(\frac{q^{\lambda+b_\mu-a_\mu}}{x}\right)^k \frac{(1-q^{1-\lambda})(1-q^{2-\lambda}).(1-q^{k-\lambda})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} \frac{(1-q^b)(1-q^{b+1})\ldots(1-q^{b+k-1})}{(1-q^{b+b_\mu})\ldots(1-q^{b+b_\mu+k-1})}$$

$$F_{n-1}\left(b+k \begin{smallmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_{\mu-1}\, a_{\mu+1} \ldots a_{n-1} \\ b_1\, b_2 \ldots b_{\mu-1}\, b_{\mu+1} \ldots b_{n-1} \end{smallmatrix} b_\mu . q . q^{b_\mu - a_\mu}\right)$$

Die in der Summe enthaltenen Reihen sind sämmtlich convergent, sobald $mod\,(q^{b_\mu-a_\mu})$ kleiner ist als der Modul jeder der Grössen $q^{-a_1}, q^{-a_2} \ldots q^{-a_{\mu-1}}, q^{-a_{\mu+1}} \ldots q^{-a_n}$. Nur in diesem Falle bildet die rechte Seite von Gleichung 10 für das Gebiet $mod\left(\frac{q^{\lambda+b_\mu-a_\mu}}{x}\right) < 1$ eine Darstellung der Function $H_n^{\mu\infty}$.

Ist eine der Grössen $mod\,(q^{-a_1})\; mod\,(q^{-a_{\mu-1}})\; mod\,(q^{-a_{\mu+1}}) \ldots mod\,(q^{-a_n})$ kleiner als $mod\,(q^{b_\mu-a_\mu})$ z. B. die Grösse $mod\,(q^{-a_1})$, so hat man, um eine convergente Reihenentwicklung zu erhalten, in die Summe $K_{b_\mu-a_\mu}$ statt:

$$\frac{p(\alpha_1, q, u q^{b_\mu-a_\mu})}{p(-b_1+\alpha_1+1, q, u q^{b_\mu-a_\mu})} = p(b_1-1, q, u q^{1-b_1+a_1+b_\mu-a_\mu})$$

den folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{\sigma(b_1-1, q, u q^{1-b_1+a_1+b_\mu-a_\mu})} \pi(b_1-1, q, u q^{1-b_1+a_1+b_\mu-a_\mu}) = (-u q^{1-b_1+a_1+b_\mu-a_\mu})^{b_1-1} \frac{p(b_1-1, q, \frac{1}{u} q^{1-b_\mu+a_\mu-a_1})}{\sigma(b_1-1, q, \frac{1}{u} q^{1-b_1+a_1+b_\mu-a_\mu})}$$

einzuführen und auch statt $p(b_1-1, q, \frac{1}{u} p^{1-b_\mu+a_\mu-a_1})$ die entsprechende Reihenentwicklung einzusetzen. Es resultirt dann die Doppelsumme:

$$(-1)^{b_1-1} q^{-b(b_\mu-a_\mu)} + q^{(1-b_1)(1-b_1+a_1+b_\mu-a_\mu)} \sigma(b_1-1, q, u q^{1-b_1+a_1+b_\mu-a_\mu}) K_{b_\mu-a_\mu} =$$

$$x^{\lambda-1} \Pi(b_\mu-1,q) \sum_0^\infty {}_k \frac{\Pi(b+b_1+k-2,q)}{\Pi(b+b_\mu+b_1+k-2,q)} \left(q\frac{\lambda+b_\mu-a_\mu}{x}\right)^k \frac{(1-q^{1-\lambda})(1-q^{2-\lambda})\ldots\ldots(1-q^{k-\lambda})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)}$$

$$\sum_0^\infty {}_i (q^{-b_\mu+a_\mu+b_1-a_1})^i \frac{(1-q^{1+b_1})(1-q^{2+b_1})\ldots(1-q^{i+b_1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots\ldots(1-q^i)} \frac{(1-q^{b_1+b+b_\mu+k-1})\ldots(1-q^{b_1+b+b_\mu+k-i-2})}{(1-q^{b_1+b+k-1})\ldots(1-q^{b_1+b+k-i-2})}$$

$$F_{n-2}\left(b_1+b+k-i-1 \begin{smallmatrix} a_2 \ldots a_{\mu-1}\, a_{\mu+1} \ldots a_{n-1} \\ b_2 \ldots b_{\mu-1}\, b_{\mu+1} \ldots b_{n-1} \end{smallmatrix} b_\mu, q, q^{b_\mu-a_\mu}\right)$$

in welcher die F_{n-2} Reihen convergent sind, da in denselben das Argument α_1 bei dem $mod\,(q^{-\alpha_1}) < mod\,(q^{b_\mu - \alpha_\mu})$ ist, nicht mehr vorkommt.

Ist $q^{-\alpha_1}$ nicht die einzige der Grössen $q^{-\alpha_1} \ldots q^{-\alpha_{n-1}}$, deren Modul kleiner ist, als der Modul von $q^{b_\mu - \alpha_\mu}$, so hat man die obige Subtitution wiederholt anzuwenden.

In ähnlicher Weise findet man:

$$K_{\alpha_\mu}(-1)^{\sigma+b} q^{-\sigma\alpha_\mu - \lambda} = \sum_0^\infty (q^{\alpha_\mu} x)^k \frac{(1-q^{1-\lambda})(1-q^{2-\lambda})\ldots(1-q^{k-\lambda})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} \frac{\Pi(\sigma+k-1,q)\,\Pi(b_\mu-1,q)}{\Pi(\sigma+b_\mu+k-1,q)}$$

$$F_{n-1}\left(\sigma+k \; {}^{1+\alpha_1-b_1}_{\quad b_1} \; {}^{1+\alpha_2-b_2}_{\quad b_2} \ldots {}^{1+\alpha_{\mu-1}-b_{\mu-1}}_{\quad b_{\mu-1}}, {}^{1+\alpha_{\mu+1}-b_{\mu+1}}_{\quad b_{\mu+1}} \ldots {}^{1+\alpha_{n-1}-b_{n-1}}_{\quad b_{n-1}} \; b_\mu \; q \; q^{1+\alpha_\mu}\right).$$

Diese Gleichung ist direct anwendbar, wenn $mod\,(q^{1+\alpha_\mu})$ kleiner ist als jede der Grössen $mod\,(q^{1+\alpha_1-b_1})$ $mod\,(q^{1+\alpha_{\mu-1}-b_{\mu-1}})$, $mod\,(q^{1+\alpha_{\mu+1}-b_{\mu+1}}) \ldots mod\,(q^{1+\alpha_{n-1}-b_{n-1}})$.

Ist dies nicht der Fall, so hat man wieder entsprechende p Funktionen, die x nicht enthalten, in Reihen nach fallenden Potenzen von u zu entwickeln und kommt dann auf mehrfache Summen von Funktionen F.

Art. 5.

Eine wesentliche Aufgabe der Untersuchung der die Differenzengleichung *(1)* befriedigenden Funktionen ist die, den Zusammenhang der verschiedenen Lösungen unter einander nach dem Satze, dass zwischen je $n+1$ Zweigen eine lineare homogene Relation mit k Funktionen als Coefficienten stattfinden muss, aufzufinden.

In Artikel 3 ist der Zusammenhang zwischen den Funktionen $H_n^{\alpha_1}, H_n^{\alpha_2}, \ldots H_n^{\alpha_{n-1}} H_n^{\alpha}$ $H_n^{b_1}, H_n^{b_2}, \ldots H_n^{b_{n-1}}$ und den Zweigen $H_n^{10} \ldots H_n^{n0}$ einerseits, und zwischen $H_n^{-\alpha_1} H_n^{-\alpha_2} \ldots H_n^{-\alpha_{n-1}}$ $H_n^{-\alpha}$, $H_n^{-b_1}$, $H_n^{-b_2}, \ldots H_n^{-b_{n-1}}$, H_n^{-b} und $H_n^{1\infty}, \ldots H_n^{n\infty}$ andrerseits angegeben worden. Wenn demnach jetzt noch die linearen Gleichungen aufgestellt werden, welche zwischen den Zweigen H_n^{10} $H_n^{20} \ldots H_n^{n0}$ und zwischen $H_n^{1\infty}$ $H_n^{2\infty} \ldots H_n^{n\infty}$ bestehen, so kann durch Auflösung linearer Gleichungen auch zwischen $n+1$ anderen Zweigen der Funktion H_n eine lineare Gleichung entwickelt werden.

Wir benutzen zur Berechnung jener Relationen die bestimmten Summen 7 Artikel 3.

Setzt man in der Summe:

$$K_{b_\mu - \alpha_\mu} q^{-b(b_\mu - \alpha_\mu)} = x^{\lambda-1} \mathop{S}_1^{q^\infty} u^b \frac{\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)} p(\alpha_\nu, q, u q^{b_\mu - \alpha_\mu})}{\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)} p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u q^{b_\mu - \alpha_\mu})} p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q^{1+b_\mu-\alpha_\mu}}{x}\right) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$x q^m$ an die Stelle von x, so erkennt man aus der Zerlegung der Summe, wie sie durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt ist:

$$(x q^m)\; q^{-b(b_\mu - \alpha_\mu)} = (x q^m)^{\lambda-1} \mathop{S}_1^{q^m} u^b \frac{\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)} p(\alpha_\nu, q, u q^{b_\mu - \alpha_\mu})}{\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)} p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u q^{b_\mu - \alpha_\mu})} \pi\left(\lambda - 1, q, \frac{u q^{1+b_\mu-\alpha_\mu}}{x q^m}\right) \frac{1}{\sigma\left(\lambda - 1, q, \frac{u q^{1+b_\mu-\alpha_\mu}}{x}\right)} \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$+ (x q^m)^{\lambda-1} \mathop{S}_{q^m}^{q^\infty} u^b \frac{\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)} p(\alpha_\nu, q, u q^{b_\mu - \alpha_\mu})}{\prod_1^{n-1}{}^{(\nu)} p(-b_\nu + \alpha_\nu + 1, q, u q^{b_\mu - \alpha_\mu})} p\left(\lambda - 1, q, \frac{u q^{1+b_\mu-\alpha_\mu}}{x q^m}\right) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{\lambda-1} q^{(1+b_\mu-\alpha_\mu)(\lambda-1)}}{\sigma\left(\lambda-1, q, \frac{q^{1+b_\mu-\alpha_\mu}}{x}\right)} \overset{q^m}{\underset{1}{S}} u^{b+\lambda-1} \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u\, q^{b_\mu-\alpha_\mu})}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu+\alpha_\nu+1, q, u\, q^{b_\mu-\alpha_\mu})} p\left(\lambda-1, q, \frac{x\, q^m}{u} q^{1-\lambda-b_\mu+\alpha_\mu}\right) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$+ (q^m)^{b+\lambda-1} x^{\lambda-1} \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^b \frac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u\, q^{b_\mu-\alpha_\mu} q^m)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu+\alpha_\nu+1, q, u\, q^{b_\mu-\alpha_\mu} q^m)} p\left(\lambda-1, q, \frac{u\, q}{x} q^{1+b_\mu-\alpha_\mu}\right) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$= K^0_{b_\mu-\alpha_\mu} + (x\, q^m)^{b+\lambda-1} K^{b+\lambda-1}_{b_\mu-\alpha_\mu},$$

dass bei dem Grenzübergang $m=\infty$ der Theil $K^0_{b_\mu-\alpha_\mu}$ der Summe $K_{b_\mu-\alpha_\mu}$ sich einer endlichen und in Bezug auf q^m eindeutigen Grenze nähert, dass aber der andere Theil $(x\, q^m)^{b+\lambda-1} K^{b+\lambda-1}_{b_\mu-\alpha_\mu}$ erst nach Multiplikation mit $(q^m)^{1-b-\lambda}$ diese Eigenschaft hat.

Ebenso ist:

$$K_{\alpha_\mu}(x\, q^m) = (x\, q^m)^{\lambda-1} K^{\lambda-1}_{\alpha_\mu} + (x q^m)^{-\sigma} K^{-\sigma}_{\alpha_\mu}.$$

$$\begin{cases} K^{\lambda-1}_{\alpha_\mu} = \dfrac{(-1)^{-\sigma-b+\lambda-1} q^{\alpha_\mu\sigma+\lambda}}{\sigma\left(\lambda-1, q, \frac{q^{1-\lambda+\alpha_\mu}}{x}\right)} q^{(1-\lambda+\alpha_\mu)(\lambda-1)} \overset{q^{-m}}{\underset{1}{S}} u^{\sigma+\lambda-1} \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(b_\nu-\alpha_\nu-1, q, u\, q^{1+\alpha_\mu})}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(-\alpha_\nu, q, u\, q^{1+\alpha_\mu})} p\left(\lambda-1, q, \dfrac{q^{1-\alpha_\mu}}{x\, u\, q^m}\right) \dfrac{\Delta u}{u(q-1)} \\ K^{-\sigma}_{\alpha_\mu} = (-1)^{-\sigma-b} q^{\alpha_\mu\sigma+\lambda} x^\sigma \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^\sigma \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(b_\nu-\alpha_\nu-1, q, u\, q^{-m+1+\alpha_\mu})}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(-\alpha_\nu, q, u\, q^{-m+1+\alpha_\mu})} p(\lambda-1, q, u\, x\, q^{1-\lambda+\alpha_\mu}) \dfrac{\Delta u}{u(q-1)} \end{cases}$$

$$K_x(x\, q^m) = (x\, q^m)^{\lambda-1} K^{\lambda-1}_x + (x q^m)^{-\sigma} K^{-\sigma}_x.$$

$$\begin{cases} K^{\lambda-1}_x = x^b \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^b \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(\alpha_\nu, q, u\, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p(-b_\nu+\alpha_\nu-1, q, u x)} p(\lambda-1, q, u q \cdot q^{-m}) \dfrac{\Delta u}{u(q-1)} \\ K^{-\sigma}_x = (-1)^{\Sigma b_\nu - n} \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma(\alpha_\nu, q, x)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma(-b_\nu+\alpha_\nu+1, q, x)} \overset{q^{-m}}{\underset{1}{S}} u^{-\sigma-\lambda+1} \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(\alpha_\nu, q, \frac{q^{1-\alpha_\nu}}{u\, x\, q^m}\right)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(-b_\nu+\alpha_\nu+1, q, \frac{q^{b_\nu-\alpha_\nu}}{u\, x\, q^m}\right)} p(\lambda-1, q, u q) \end{cases}$$

$$K_{x q^{n-\lambda+1}}(x q^m) = K^0_{x q^{n-\lambda+1}} + (x\, q^m)^{b+\lambda-1} K^{b+\lambda-1}_{x q^{n-\lambda+1}}.$$

$$\begin{cases} K^0_{x q^{n-\lambda+1}} = (-1)^{-\sigma-b} q^{\lambda(\sigma+1)} x^{-\sigma} \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^\sigma \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(+b_\nu-\alpha_\nu-1, q, \frac{u\, q^{1+\lambda}}{x}\right)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, p\left(-\alpha_\nu, q, \frac{u}{x} q^{1+\lambda}\right)} p(\lambda-1, q, u q \cdot q^m) \dfrac{\Delta u}{u(q-1)} \\ K^{b+\lambda-1}_{x q^{n-\lambda+1}} = (-1)^{\lambda-1} q^{\lambda(1-b-\lambda)+1-b-\sigma} \dfrac{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\left(b_\nu-\alpha_\nu-1, q, \frac{u}{x} q^{1+\lambda}\right)}{\prod_1^{n-1}(\nu)\, \sigma\left(-\alpha_\nu, q, \frac{u}{x} q^{1+\lambda}\right)} \overset{q^m}{\underset{1}{S}} u^{1-b-\lambda} \dfrac{\prod_1^{n-1} p\left(b_\nu-\alpha_\nu-1, q, \frac{x q^m}{n} q^{1-\lambda-b_\nu+\alpha_\nu}\right)}{\prod_1^{n-1} p\left(-\alpha_\nu, q, \frac{x q^m}{u} q^{-\lambda+\alpha_\nu}\right)} p(\lambda-1, q, uq) \dfrac{\Delta u}{u(q-1)} \end{cases}$$

Es ist ferner:

$$\overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^a p(-a-c-1,q,uq)\, p(c,q,uxq^{-c}) \frac{\Delta u}{u(q-1)} = \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^a p(-a-c-1,q,uq) \sum_0^\infty k (ux)^k \frac{(1-q^{-c})(1-q^{-c+1})\dots(1-q^{-c+k-1})}{(1-q)\ (1-q^2)\ \dots\ (1-q^k)} \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$\frac{\Pi(a+k-1,q)\,\Pi(-a-c-1,q)}{\Pi(-c+k-1,q)} \frac{(1-q^{-c})\dots(1-q^{-c+k-1})}{(1-q)\ \dots\ (1-q^k)} = \frac{\Pi(a-1,q)\ \Pi(-a-c-1,q)}{\Pi(-c-1,q)} p(-a,q,xq^a)$$

$$= \frac{\Pi(a-1,q)\ \Pi(-a-c-1,q)}{\Pi(-c-1,q)} \pi(-a,q,axq^a) \frac{1}{\sigma(-a,q,axq^a)}$$

$$= \frac{\Pi(a-1,q)\ \Pi(-a-c-1,q)}{\Pi(-c-1,q)} \pi(-a,q,axq^a)\,\sigma(u,q,ax)(q^{-a^2})$$

Wird xq^m an die Stelle von x gesetzt, dann zur Grenze $m = -\infty$ übergegangen und beachtet, dass:

$$\sigma(c,q,uxq^{-c}) \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^{a+c} p(-a-c-1,q,uq)\, p\left(c,q,\frac{1}{uxq^{m+1}}q^{-c^2}\right) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$ für $m = -\infty$ verschwindet, da $\frac{1}{\Pi(-1,q)} = o$

ist, so muss:

$$\lim(m=-\infty) \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^a p(-a-c-1,q,uq^{-m})\, p(c,u,xq^{-c}) \frac{\Delta u}{u(q-1)} = \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^a p(c,uxq^{-c}) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$= (x)^{-a} \sigma(a,q,x) \frac{\Pi(a-1,q)\,\Pi(-a-c-1,q)}{\Pi(-c-1,q)},$$

also:

$$\overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^a p(c,uxq^{-c+d}) \frac{\Delta u}{u(q-1)} = (-xq^d)^{-a} \sigma(a,q,xq^d) \frac{\Pi(a-1,q)\ \Pi(-a-c-1,q)}{\Pi(-c-1,q)}$$

sein.

Bezeichnet man nun den Coefficienten von $(xq^m)^\nu$ in $K^o_{b_\mu - a_\mu}$ mit $K^{o\nu}_{b_\mu-a_\mu}$ in $K^{b+\lambda-1}_{b_\mu-a_\mu}$ mit $K^{b+\lambda-1,\nu}_{b_\mu-a_\mu}$ und führt entsprechende Bezeichnungen bei den anderen oben erwähnten Grössen ein, so ist:

$$K^{o\nu}_{b_\mu-a_\mu} = \frac{(-1)^{\lambda-1} q^{(b+\lambda-\nu-1)(b_\mu-a_\mu)+\lambda-1}}{\sigma\left(\lambda-1,q,\frac{q^{1+b_\mu-a_\mu}}{x}\right)} \frac{(1-q^{1-\lambda})(1-q^{2-\lambda})\dots(1-q^{k-\lambda})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)} F_{n-1}\left(b+\lambda-k-1, {}^{a_1\dots a_\mu a_{\mu+1}\dots a_{n-1}}_{b_1\dots b_\mu b_{\mu+1}\dots b_{n-1}} b_\mu q q^{b_\mu-a_\mu}\right)$$

$$\frac{\Pi(b-k-1,q)\,\Pi(b_{\mu-1},q)}{\Pi(b+b_\mu-k-1,q)}$$

$$K^{b+\lambda-1,\nu}_{b_\mu-a_\mu} = (-1)^{-b-\nu} q^{-(b-\nu)\lambda} \sigma\left(-b-\nu,q,\frac{q^{\lambda+b_\mu-a_\mu}}{x}\right) \frac{\Pi(b+\nu-1,q)\,\Pi(-b-\nu-\lambda,q)}{\Pi(-\lambda,q)} C_\nu.$$

$$K^{o\nu}_{xq^n-\lambda+1} = (-1)^{-\sigma-b} q^{\lambda\sigma+\lambda(\nu+1)} \frac{(1-q^{1-\lambda})\dots(1-q^{k-\lambda})}{(1-q)\dots(1-q^k)} x^{\sigma+\nu} \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^{\sigma+\nu} \frac{\prod_{1}^{n-1}(\nu)\, p\left(b_\nu-\alpha_\nu-1,q,\frac{uq^{1+\lambda}}{x}\right)}{\prod_{1}^{n-1}(\nu)\, p\left(-\alpha_\nu,q,\frac{uq^{1+\lambda}}{x}\right)} \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$K^{b+\lambda-1,\nu}_{xq^n-\lambda+1} = (-1)^{\lambda-1} q^{\lambda(1-b-\lambda-\nu)} \frac{\Pi(-\lambda-b-\nu,q)\,\Pi(\lambda-1,q)}{\Pi(-b-\nu,q)} C_\nu \frac{\prod_{1}^{n-1}(\nu)\,\sigma\left(b_\nu-\alpha_\nu-1,q,\frac{uq^{1+\lambda}}{x}\right)}{\prod_{1}^{n-1}(\nu)\,\sigma\left(-\alpha_\nu,q,\frac{uq^{1+\lambda}}{x}\right)}$$

$$K^{\lambda-1,\nu}_{\alpha_\mu} = (-1)^{-\sigma-b-\lambda+1} q^{\alpha_\mu\sigma-1+(\lambda-\nu-1)(\alpha_\mu-\lambda)} \frac{(1-q^{1-\lambda})\dots(1-q^{\nu-\lambda})}{(1-q)\dots(1-q^\nu)}$$

$$F_{n-1}\left[\sigma+\lambda-k-1\,{}^{1-b_1-\alpha_1\ldots 1-b_{\mu-1}-\alpha_{\mu-1}\,1+b_{\mu-1}+\alpha_{\mu+1}\ldots 1-b_{n-1}-\alpha_{n-1}}_{b_1 \qquad b_{\mu-1} \qquad b_{\mu+1} \qquad b_{n-1}}\,b_\mu, q, q^{1+\alpha_\mu}\right]\frac{\Pi(\sigma-\nu-1,q)\,\Pi(b_\mu-1,}{\Pi(\sigma+b_\mu-\nu-1,q)}$$

$$K_{\alpha_\mu}^{-\sigma,\nu}=(-1)^{-\sigma-\nu}q^{\lambda}\sigma(-\sigma-\nu,q,xq^{\alpha_\mu})\frac{\Pi(\sigma+\nu-1,q)\,\Pi(-\sigma-\lambda-\nu,q)}{\Pi(-\lambda,q)}G_\nu.$$

$$K_x^{-\sigma,\nu}=(-1)^{-\sigma-b+\lambda+1}\frac{\overset{n-1}{\underset{1}{\Pi(\nu)}}\,\sigma(\alpha_\nu,q,x)}{\overset{n-1}{\underset{1}{\Pi(\nu)}}\,\sigma(-b_\nu+\alpha_\nu+1,q,x)}\frac{\Pi(-\sigma-\lambda-\nu,q)\,\Pi(\lambda-1,q)}{\Pi(-\sigma-\nu,q)}G_\nu.$$

$$K_x^{\lambda-1,\nu}=(x)^{-b-\nu}q^{\lambda\nu}\frac{(1-q^{1-\lambda})\ldots(1-q^{\nu-\lambda})}{(1-q)\ldots(1-q^{\nu})}\overset{q^\infty}{\underset{1}{S}}u^{b+\nu}\frac{\overset{n-1}{\underset{1}{\Pi(\nu)}}\,p(\alpha_\nu,q,x)}{\overset{n-1}{\underset{1}{\Pi(\nu)}}\,p(-b_\nu+\alpha_\nu+1,q,x)}\frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

wo C_ν dieselben Constanten, wie in der Reihenentwicklung von K_x Cap. 4, G_ν diejenigen, welche aus C_ν hervorgehen, wenn $b_\tau-\alpha_\tau-1$ an die Stelle von α_τ gesetzt wird, und die F_{n-1} Reihen durch mehrfache Summen zu ersetzen sind, wenn sie selbst aufhören zu convergiren.

Um in der Gleichung:

$$K_{\alpha_\mu}=\sum_{1}^{n-1}\nu\, k_\nu^{\alpha_\mu}K_{b_\nu-\alpha_\nu}+k_n^{\alpha_\mu}K_{xq^n-\lambda+1}$$

die k Funktionen $k_1^{\alpha_\mu}\,k_2^{\alpha_\mu}\ldots k_n^{\alpha_\mu}$ zu bestimmen, setzen wir in derselben xq^m an die Stelle von x und wählen, wenn wir zur Grenze $m=\infty$ übergehen, für K_{α_μ} seine Reihenentwicklung und für $K_{b_\nu-\alpha_\nu}$, $K_{xq^n-\lambda+1}$ ihre Ausdrücke durch bestimmte Summen, wenn wir dagegen zur Grenze $m=-\infty$ übergehen, für K_{α_μ} die betreffende bestimmte Summe und für $K_{b_\mu-\alpha_\mu}\,K_{xq^n-\lambda+1}$ ihre Reihenentwicklungen. Dann zerlegen wir die Summen nach oben angegebenen Methoden und setzen die Summen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von q^m gleich 0. Werden aus den so gebildeten Gleichungen n von einander unabhängige ausgewählt, so können aus diesen die gesuchten Grössen gewonnen werden. Es ist bemerkenswert, dass die mit den Potenzen $(q^m)^{b_\mu+\lambda+\nu-1}$ und $(q^m)^{\sigma+\nu}$ $(\nu=0\,1\,2\ldots n-1)$ behafteten Coefficienten nur 2 Gleichungen liefern, da:

$$\frac{K_{b_1-\alpha_1}^{b+\lambda-1,0}}{K_{b_1-\alpha_1}^{b+\lambda-1,\nu}}=\frac{K_{b_2-\alpha_2}^{b+\lambda-1,0}}{K_{b_2-\alpha_2}^{b+\lambda-1,\nu}}=\qquad=\frac{K_{xq^n-\lambda+1}^{b+\lambda-1,0}}{K_{xq^n-\lambda+1}^{b+\lambda-1,\nu}}$$

$$\frac{K_{\alpha_\mu}^{-\sigma,0}}{K_{\alpha_\mu}^{-\sigma,\nu}}=\frac{K_{xq^n-\lambda+1,0}}{K_{xq^n-\lambda+1,\nu}}$$

ist, wo $K_{xq^n-\lambda+1,0}$ den Coefficienten von $x^{-\sigma}$, $K_{xq^n-\lambda+1,\nu}$ den Coefficienten von $x^{-\sigma-\nu}$ in der Reihenentwicklung von $K_{xq^n-\lambda+1}$ bedeutet. Durch das Nullsetzen der Coefficienten von $(q^m)^0$ $(q^m)^1\ldots$ u. s. f. erhält man dagegen $n-1$ von einander unabhängige, und durch das Nullsetzen der Coefficienten von $(q^m)^{\lambda-1}$, $(q^m)^{\lambda-2}$ .... wie der $n-1$ unter sich unabhängige lineare Gleichungen, welche zur Bestimmung der k Funktionen dienen können.

Aus der Gleichung, welche $K_{xq^n-\lambda+1}^{00}$ enthält, ist man im Stande, diese Grösse durch Constanten und σ Funktionen auszudrücken, um den so erhaltenen Wert zu benutzen, in der Gleichung:

$$K_x=\sum_{1}^{n-1}\nu\, k_\nu^x K_{b_\nu-\alpha_\nu}+k_n^x K_{xq^n-\lambda+1}$$

die Grössen k_ν^x und k_n^x zu bestimmen, und zwar geschieht dies wieder durch das Nullsetzen der Coefficienten der einzelnen Potenzen von q^m. Durch dieselbe Methode werden die Relationen erhalten, welche die Grössen $K_{b_\nu-\alpha_\nu}$, $K_{xq^n-\lambda+1}$ mit den Zweigen $K_{\alpha_1}\ldots K_{\alpha_{n-1}}\,K_x$ verbinden.

Art. 7.

Die Funktion:

$$P_n\begin{pmatrix}\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_n\ \gamma_1\\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ \gamma_2\end{pmatrix}, q, x)$$

soll durch folgende Eigenschaften definirt werden.

1. Sie ist für alle Werte von x ausser ∞ einändrig.

2. Zwischen je $n+1$ Zweigen der Funktion P_n findet eine homogene lineare Relation mit k Funktionen als Coefficienten statt.

3. Die Funktion lässt sich in die Formen setzen:

$$\begin{array}{llll}
k_{10}\ P_n^{10} & +k_{20}\ P_n^{20} & +\ldots\ldots+k_{n0}\ P_n^{n0} & .\\
k_{\alpha_1}\ P_n^{\alpha_1} & +k_{\alpha_2}\ P_n^{\alpha_2} & +\ldots\ldots+k_{\alpha_n}\ P_n^{\alpha_n} & .\\
k_{\beta_1}\ P_n^{\beta_1} & +k_{\beta_2}\ P_n^{\beta_2} & +\ldots\ldots+k_{\beta_n}\ P_n^{\beta_n} & .\\
k_{-\alpha_1} P_n^{-\alpha_1} & +k_{-\alpha_2} P_n^{-\alpha_2} & +\ldots\ldots+k_{-\alpha_n} P_n^{-\alpha_n} & .\\
k_{-\beta_1} P_n^{-\beta_1} & +k_{-\beta_2} P_n^{-\beta_2} & +\ldots\ldots+k_{-\beta_n} P_n^{-\beta_n} & .\\
k_{1\infty}\ P_n^{1\infty} & +k_{2\infty}\ P_n^{2\infty} & +\ldots\ldots+k_{n\infty}\ P_n^{n\infty} & .
\end{array}$$

Hier sind die Coefficienten der Grössen P_n k Funktionen.

Ferner sind $P_n^{10}\ P_n^{20}\ldots P_n^{n0}$ in der Umgebung des Punktes $x=o$ eindeutig und stetig und für $x=o$ von Null verschieden.

Die Funktionen $P_n^{\alpha_1}\ P_n^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}$ werden bez. in den Punktfolgen $q^{-\alpha_1}, q^{-\alpha_2}\ldots q^{-\alpha_n}$ unendlich gross von der 1. Ordnung. Dieselbe Eigenschaft haben $P_n^{-\beta_1}\ P_n^{-\beta_2}\ldots P_n^{-\beta_n}$ für die conjugirten Punktfolgen $q^{\beta_1}, q^{\beta_2}, \ldots q^{\beta_n}$. Die Funktionen $P_n^{\beta_1}\ P_n^{\beta_2}\ldots P_n^{\beta_n}$ verschwinden bez. in den Punktfolgen $q^{\beta_1}, q^{\beta_2}, \ldots q^{\beta_n}$ von der 1. Ordnung und werden sämmtlich unendlich gross von der 1. Ordnung in den Punktfolgen $q^{-\alpha_1}, q^{-\alpha_2}, \ldots q^{-\alpha_n}$. $P_n^{-\alpha_1}\ P_n^{-\alpha_2}\ldots P_n^{-\alpha_n}$ verschwinden von der 1. Ordnung bez. in den conjugirten Punktfolgen $q^{-\alpha_1}\ q^{-\alpha_2}\ldots q^{-\alpha_n}$ und werden sämmtlich unendlich gross von der 1. Ordnung in den conjugirten Punktfolgen $q^{\beta_1}\ q^{\beta_2}\ldots q^{\beta_n}$. Im Übrigen bleiben die Funktionen $P_n^{\alpha_\nu}\ P_n^{\beta_\nu}\ P_n^{-\alpha_\nu}\ P_n^{-\beta_\nu}$ $(\nu=1\ 2\ldots n)$ ausser für $x=o$ und $x=\infty$ überall eindeutig und endlich.

$$P_n^{1\infty}\ x^{\gamma_1}, P_n^{2\infty}\ x^{\gamma_1}\ldots P_n^{n-1,\infty}\ x^{\gamma_1}, P_n^{n\infty}\ x^{\gamma_2}$$

sind in der Umgebung des Punktes $x=\infty$ durchaus einändrig und für $x=\infty$ von o und ∞ verschieden. Hierbei ist:

$$\gamma_2 = n-\beta_1-\beta_2\ldots-\beta_n-\alpha_1-\alpha_2\ldots-\alpha_n-(n-1)\gamma_1-1$$

4. Analog der Definition der Funktion H_n sollen auch hier die Eigenschaften 3 der Grössen $P_n^{10}, P_n^{20}, \ldots P_n^{n0}, P_n^{1\infty}, P_n^{2\infty}, \ldots P_n^{n\infty}$ modificirt werden. Für $P_n^{10}\ldots P_n^{n0}$ lassen sich stets solche Ausdrücke wählen, dass $P_n^{10}\ P_n^{10}\ x^{-1}\ldots P_n^{n0}\ x^{-n+1}$ für $x=o$ von Null und Unendlich verschiedene Werte annehmen, ebenso für $P_n^{1\infty}\ldots P_n^{n-1,\infty}$, solche, dass $P_n^{1\infty}\ x^{1+\gamma_1}, P_n^{2\infty}\ x^{1+\gamma_1}, \ldots P_n^{n-1,\infty}\ x^{n-2+\gamma_1}$ für $x=\infty$ dieselbe Eigenschaft haben.

5. In Betreff der Indices wird vorausgesetzt, dass keine der Differenzen:

$$\alpha_\nu-\beta_\mu, \alpha_\nu-\alpha_\mu, \beta_\nu-\beta_\mu, \gamma_1-\gamma_2$$

die Form $m+n\,lg\dfrac{2\pi i}{q}$ hat, wo m und n positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.

Aus dieser Definition folgt:

6. Eine P_n Funktion verliert ihren Charakter als solche nicht, wenn sie mit einem k Faktor multiplicirt wird.

7. In einer P_n Funktion können $\beta_1\ \beta_2\ldots\beta_n$ unter einander beliebig vertauscht werden. Dasselbe gilt von $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_n$.

Ferner ist:

$$8.\quad P_n\begin{pmatrix}\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n\ \gamma_1 \\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n\ \gamma_2\end{pmatrix} q, x\Big) = P_n\begin{pmatrix}\beta_1 + \mu, \ldots \beta_n + \mu\ \gamma_1 \\ \alpha_1 - \mu, \ldots \alpha_n + \mu\ \gamma_2\end{pmatrix} q, x\, q^{\mu}\Big)$$

$$9.\quad P_n\begin{pmatrix}\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n\ \gamma_1 \\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n\ \gamma_2\end{pmatrix} q, x\Big) = P_n\begin{pmatrix}\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1 \ldots \alpha_n - 1\ \gamma_1 \\ \beta_1 + 1, \beta_2 + 1 \ldots \beta_n + 1\ \gamma_2\end{pmatrix} \frac{1}{q}, x\Big).$$

Es soll daher im Folgenden nur der Fall $q < 1$ betrachtet werden.

Man findet nun nach der im Art. 2 angewandten Methode, dass die Funktion $P_n(x)$ folgender Differenzengleichung genügen muss:

$$\varphi(x)\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\nu(-1)^{\nu}\frac{1}{q^{\Sigma(\nu-1)}}\left[\frac{(q^{-\gamma_1-n+1}-1)\ldots(q^{-\gamma_1-n-\nu}-1)}{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^{\nu}-1)}\frac{\Delta^{\nu}\varphi\left(\frac{x}{q^{\nu}}\right)}{\Delta x^{\nu}} + \frac{(q^{-\gamma_1-n+2}-1)\ldots(q^{-\gamma_1-n-\nu}-1)}{(q-1)\ldots(q^{\nu-1}-1)}\frac{\Delta^{\nu-1}\psi\left(\frac{x}{q^{\nu-1}}\right)}{\Delta x^{\nu-1}}\right]\frac{\Delta^{n-\nu} y}{\Delta x^{n-\nu}} = 0$$

worin:

$$\varphi(x) = \Pi_{(\nu)1}^{n}(1 - x\, q^{n-\beta_\nu-1})$$

$$\varphi(x\, q^{-\gamma_1-n+1}) - x(q-1)\,\psi(x\, q^{-\gamma_1-n+1}) = \Pi_{(\nu)1}^{n}(1 - x\, q^{\alpha_\nu})$$

ist. Es zeigt sich auch hier wieder, dass zur Ableitung der Differenzengleichung je zwei der unter 3 erwähnten Gruppen von Zweigen: $P_n^{\alpha_\nu}, P_n^{\beta_\nu}, P_n^{-\alpha_\nu}, P_n^{-\beta_\nu}$ zusammen mit den übrigen Eigenschaften der Funktion $P_n(x)$ genügen.

Die im Art. 3 angewandten Methoden liefern für $P_n^{10}\,P_n^{20}\ldots P_n^{n0}$ und $P_n^{n\infty}$ Darstellungen durch bestimmte Summen und Potenzreihen. Für $P_n^{1\infty}\ldots P_n^{n-1\infty}$ Reihen oder Summen von einfachem Bildungsgesetz zu finden, ist mir nicht gelungen. Nach Analogie der Summen $K_{b_\mu - a_\mu}$ und K_x Art. 3, lassen sich hier keine Summen bilden, weil die Funktion $\varphi(x)$ bei der vorliegenden Differenzengleichung nicht mehr für $x = q^{\infty}$ verschwindet.

Im Falle $n = 2$ kann man jedoch wegen der Vertauschbarkeit von γ_1 und γ_2 auch für $P_2^{1\infty}$ eine bestimmte Summe angeben und in Folge dessen die Differenzengleichung in derselben Vollständigkeit behandeln, wie Herr *Thomae* es mit der Differenzengleichung gethan hat, welcher die *Heine*'sche Reihe genügt.

Art. 8.

Die Differenzengleichung 2. Ordnung lautet:

$$1)\quad \varphi(x)\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - \left[\frac{q^{-(\gamma_1+1)}-1}{q-1}\frac{\Delta\varphi\left(\frac{x}{q}\right)}{\Delta x} + \psi\left(\frac{x}{q}\right)\right]\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{q}\left[\frac{q^{-(\gamma_1+1)}-1}{q-1}\,\frac{q^{-\gamma_1}-1}{q^2-1}\,\frac{\Delta^2\varphi\left(\frac{x}{q^2}\right)}{\Delta x^2} + \frac{q^{-\gamma_1}-1}{q-1}\,\frac{\Delta\psi\left(\frac{x}{q^2}\right)}{\Delta x}\right]y = 0$$

in der:

$$\varphi(x) = (1 - x\, q^{1-\beta_1})(1 - x\, q^{1-\beta_2})$$

$$\varphi(x\, q^{-(\gamma_1+1)}) - x(q-1)\,\psi(x\, q^{-(\gamma_1+1)}) = (1 - x\, q^{\alpha_1})(1 - x\, q^{\alpha_2})$$

ist.

Wenn:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

ist, so entspricht ihr die Recursionsformel:

$$2)\quad (1 - x\, q^{1-\beta_1})(1 - x\, q^{1-\beta_2})\,P_2(x\, q^2) - \left[1 + q - x(q^{1-\beta_1} + q^{1-\beta_2} + q^{1+\alpha_1} + q^{1+\alpha_2}) + x^2(q^{-\gamma_1} + q^{-\gamma_2})\,q^{2-\beta_1-\beta_2}\right].P_2(q\,x)$$
$$+ (1 - x\, q^{\alpha_1})(1 - x\, q^{\alpha_2})\,P_2(x) = 0.$$

Für die Bestandtheile $P_2^{10}\, P_2^{20}$ ergeben sich die Summen:

$$3)\begin{cases} P_2^{10} = \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^{\gamma_2} \dfrac{p(\alpha_1,q,uq)\,p(\alpha_2,q,uq^{1+\alpha_1-\alpha_2})}{p(1-\gamma_1-\beta_1,q,uq^{\beta_1+\gamma_1+\alpha_1})\,p(1-\gamma_1-\beta_2,q,uq^{\beta_2+\gamma_1+\alpha_1})}\, p(-\gamma_1,q,uxq^{\gamma_1+\alpha_1})\dfrac{\Delta u}{u(q-1)}. \\ P_2^{20} = \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^{\gamma_2} \dfrac{p(\alpha_1,q,uq^{1+\alpha_2-\alpha_1})\,p(\alpha_1,q,uq)}{p(1-\gamma_1-\beta_1,q,uq^{\beta_1+\gamma_1+\alpha_2})\,p(1-\gamma_1-\beta_2,q,uq^{\beta_2+\gamma_1+\alpha_2})}\, p(-\gamma_1,q,uxq^{\gamma_1+\alpha_2})\dfrac{\Delta u}{u(q-1)}. \end{cases}$$

Aus der Entwicklung:

$$\frac{\Pi(-\alpha_2-\beta_2,q)\,\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)}{\Pi(\gamma_2-1,q)\quad \Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2,q)}(1-q)^{-\gamma_1}P_2^{10}$$

$$\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)(1-q)^{-\gamma_1}\sum_0^\infty{}_k \frac{(1-q^{\gamma_1})\ldots(1-q^{\gamma_1+k-1})}{(1-q^{-\alpha_2-\beta_2})\ldots(1-q^{-\alpha_2-\beta_2+k-1})}\,\frac{(1-q^{\gamma_2})\ldots(1-q^{\gamma_2+k-1})}{(1-q)\ldots(1-q^k)}(q^{+\alpha_1}x)^k \overset{q^\infty}{\underset{1}{S}} u^{\gamma_2+k} p(\gamma_1+\beta_1+\alpha_1-1,q,uq)p(\gamma_1+\beta_2+\alpha_1-1,)\frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

in der nach der *Thomae*'schen Abhandlung, *Crelle* 70, pag. 271.

$$\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)(1-q)^{-\gamma_1}\overset{q^\infty}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_2+k}p(\gamma_1+\beta_1+\alpha_1-1,q,uq)p(\gamma_1+\beta_2+\alpha_2-1,q,uq^{1+\alpha_1-\alpha_2})\frac{\Delta u}{u(q-1)}\frac{\Pi(-\alpha_2-\beta_2+k-1,q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2,q)\Pi(\gamma_2+k-1,q)}$$

$$=\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2,q)(1-q)^{-\gamma_2}\overset{q^\infty}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_1+k}p(\gamma_2+\beta_1+\alpha_1-1,q,uq)p(\gamma_2+\beta_2-\alpha_2-1,q,uq^{1+\alpha_1-\alpha_2})\frac{\Delta u}{u(q-1)}\cdot\frac{\Pi(-\alpha_2-\beta_2+k-1,q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_1,q)\Pi(\gamma_1+k-1,q)}$$

ist, geht hervor, dass der Ausdruck:

$$y_{10} = \frac{\Pi(-\alpha_2-\beta_2,q)\,\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)}{\Pi(\gamma_2-1,q)\quad \Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2,q)}(1-q)^{-\gamma_1}P_2^{10}$$

unverändert bleibt, wenn γ_2 mit γ_1 vertauscht wird. Dasselbe gilt für:

$$y_{20} = \frac{\Pi(-\alpha_1-\beta_2,q)\,\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1,q)}{\Pi(\gamma_2-1,q)\quad \Pi(-\alpha_1-\beta_2-\gamma_2,q)}(1-q)^{-\gamma_1}P_2^{10}.$$

Weiter haben wir die Reihenentwickelungen:

$$\begin{cases} y_{10} = \Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1)(1-q)^{-\gamma_1}\sum_0^\infty{}_k \dfrac{(1-q^{\gamma_1})\ldots(1-q^{\gamma_1+k-1})}{(1-q^{-\alpha_2-\beta_2})\ldots(1-q^{-\alpha_2-\beta_2+k-1})}\,\dfrac{(1-q^{\gamma_2})\ldots(1-q^{\gamma_2+k-1})}{(1-q)\ldots(1-q^k)}(q^{+\alpha_1}x)^k F(\gamma_2+k,\beta_1+\gamma_2+\alpha_1,k+1-\beta_2-\alpha_2,q^{\alpha_1+\beta_2+\gamma_1}) \\ y_{20} = \Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1)(1-q)^{-\gamma_1}\sum_0^\infty{}_k \dfrac{(1-q^{\gamma_1})\ldots(1-q^{\gamma_1+k-1})}{(1-q^{-\alpha_2-\beta_2})\ldots(1-q^{-\alpha_2-\beta_2+k-1})}\,\dfrac{(1-q^{\gamma_2})\ldots(1-q^{\gamma_2+k-1})}{(1-q)\ldots(1-q^k)}(q^{+\alpha_2}x)^k F(\gamma_2+k,\beta_1+\gamma_2+\alpha_2,k+1-\beta_2-\alpha_1,q^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_1}). \end{cases}$$

In der Umgebung des Punktes ∞ ist das allgemeine Integral der Differenzengleichung darstellbar in der Form:

$$k_{1\infty}P_2^{1\infty} + k_{2\infty}P_2^{2\infty},$$

und zwar ist:

$$5)\begin{cases} P_2^{2\infty} = x^{-\gamma_2}\overset{q^\infty}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_2}\dfrac{p(\alpha_1,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_1-\alpha_1})\,p(\alpha_2,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_1-\alpha_2})}{p(1-\beta_1-\gamma_1,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_1})\,p(1-\beta_2-\gamma_1,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_2})}\,p(-\gamma_1,q,uq)\dfrac{\Delta u}{u(q-1)} \\ \quad = x^{-\gamma_2}\dfrac{\Pi(-\gamma_1,q)\,\Pi(\gamma_2-1,q)}{\Pi(\gamma_2-\gamma_1,q)}F_3\left(\gamma_2\ \begin{matrix}-\beta_1-1 \\ \beta_1+\gamma_1+\alpha_1\end{matrix}\ \begin{matrix}-\beta_2-1 \\ \beta_2+\gamma_1+\alpha_2\end{matrix}\ 1-\gamma_1,q,\dfrac{1}{x}\right) = x^{-\gamma_2}\dfrac{\Pi(-\gamma_1,q)\,\Pi(\gamma_2-1,q)}{\Pi(\gamma_2-\gamma_1,q)}F_3(\gamma_2), \end{cases}$$

und wie sich durch Vertauschung von γ_1 und γ_2 ergiebt:

$$5)\begin{cases} P_2^{1\infty} = x^{-\gamma_1}\overset{q^\infty}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_1}\dfrac{p(\alpha_1,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_2-\alpha_1})\,p(\alpha_2,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_2-\alpha_2})}{p(1-\beta_1-\gamma_2,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_1})\,p(1-\beta_2-\gamma_2,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_2})}\,p(-\gamma_2,q,uq)\dfrac{\Delta u}{u(q-1)} \\ \quad = x^{-\gamma_1}\dfrac{\Pi(-\gamma_2,q)\,\Pi(\gamma_1-1,q)}{\Pi(\gamma_1-\gamma_2,q)}F_3\left(\gamma_1\ \begin{matrix}-\beta_1-1 \\ \beta_1+\gamma_2+\alpha_1\end{matrix}\ \begin{matrix}-\beta_2-1 \\ \beta_2+\gamma_2+\alpha_2\end{matrix}\ 1-\gamma_2,q,\dfrac{1}{x}\right) = x^{-\gamma_1}\dfrac{\Pi(-\gamma_2,q)\,\Pi(\gamma_1-1,q)}{\Pi(\gamma_1-\gamma_2,q)}F_3(\gamma_1). \end{cases}$$

Was die Darstellung:

$$6)\qquad P_2(x) = k_{\alpha_1} P_2^{\alpha_1} + k_{\alpha_2} P_2^{\alpha_2}$$

anbetrifft, so ist:

$$P_2^{\alpha_1} = P_2^{10}; \quad P_2^{\alpha_2} = P_2^{20}.$$

Da ferner:

$$P_2^{10}(q^{\beta_1}) = \mathop{S}_1^{q^\infty} u^{\gamma_2} \frac{p(\gamma_1+\beta_1-1, u q^{1+\alpha_1})\, p(\gamma_1+\beta_2-1, u q^{1+\alpha_1})}{p(-\alpha_1, u q^{1+\alpha_1})\, p(-\alpha_2, u q^{1+\alpha_1})} p(-\gamma_1, q, u q^{\beta_1+\gamma_1+\alpha_1}) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$= \mathop{S}_1^{q^\infty} u^{\gamma_2}\, p(\beta_1+\alpha_1-1, u q)\, p(\gamma_1+\beta_2+\alpha_2-1, u q^{1+\alpha_2+\alpha_1}) \frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$= \frac{\Pi(\beta_1+\alpha_1-1, q)\, \Pi(\gamma_2-1, q)}{\Pi(\beta_1+\alpha_1+\gamma_2-1, q)} p(-\gamma_2, q, q^{\gamma_2+\gamma_1+\beta_2+\alpha_1})$$

$$= \frac{\Pi(\beta_1+\alpha_1-1, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2, q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_1, q)\quad \Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_1, q)} \Pi(\gamma_2-1, q)(1-q)^{-\gamma_2}.$$

$$y_{10}(q^{\beta_1}) = \frac{\Pi(\beta_1+\alpha_1-1, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_2, q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_1)} (1-q)^{-(\gamma_1+\gamma_2)} \cdot \frac{\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1, q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_1, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2, q)}$$

also:

$$P_2^{10}(q^{\beta_2}) = \frac{\Pi(\beta_2+\alpha_1-1, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2, q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2, q)\quad \Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1, q)} \Pi(\gamma_2-1, q)(1-q)^{-\gamma_2}$$

$$y_{10}(q^{\beta_2}) = \Pi(\beta_2+\alpha_1-1, q)(1-q)^{-(\gamma_1+\gamma_2)}$$

ist, so können wir nach den in Art. 4 behandelten Principien setzen:

$$7)\quad P_2^{\beta_1} = \frac{\Pi(\beta_1+\alpha_2-1, q)\, \Pi(-\alpha_1-\beta_2, q)}{\Pi(-\alpha_1-\beta_1, q)} \frac{\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2, q)\, \Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1, q)}{\Pi(-\alpha_1-\beta_2-\gamma_1, q)\, \Pi(-\alpha_1-\beta_2-\gamma_2, q)} y_{10}$$

$$- \frac{\Pi(\beta_1+\alpha_1-1, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_2, q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_1, q)} \frac{\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1, q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_1, q)\, \Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2, q)} y_{20}$$

$$P_2^{\beta_2} = \Pi(\beta_2+\alpha_2-1, q)\, y_{10} - \Pi(\beta_2+\alpha_1-1, q)\, y_{20}.$$

Die Zweige $P_2^{-\alpha_1}$ $P_2^{-\alpha_2}$ und $P_2^{-\beta_1}$ $P_2^{-\beta_2}$ setzen wir aus den Zweigen $P_2^{1\infty}$ und $P_2^{2\infty}$ in folgender Weise zusammen.

Es ist:

$$\left[P_2^{1\infty}(q^{1+\beta_1})(1-x q^{-1-\beta_1})\right](x=q^{\beta_1+1}) = (q^{-\gamma_1})^{\beta_1+1} \frac{p(\alpha_1, q, q^{1-\gamma_2-\beta_1-\alpha_1})\, p(\alpha_2, q, q^{1-\gamma_2-\beta_1-\alpha_2})}{p(-\beta_1-\gamma_2, q, q)\qquad p(1-\beta_2-\gamma_2, q, q^{\beta_2-\beta_1})} p(-\gamma_2, q, q)$$

$$= (q^{-\gamma_1})^{\beta_1+1} \frac{\Pi(-\gamma_2-\beta_1, q)}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_1, q)} \frac{\Pi(-\gamma_2-\beta_1)}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_2, q)} \frac{\Pi(\beta_2-\beta_1-1, q)}{\Pi(-\beta_1-\gamma_2, q)} \frac{\Pi(-\gamma_2, q)}{\Pi(-\beta_1-\gamma_2, q)} (1-q)^{-\gamma}$$

$$= (q^{\beta_1+1})^{-\gamma_1} \frac{\Pi(\beta_2-\beta_1-1, q)\qquad \Pi(-\gamma_2, q)}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_1, q)\, \Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_2, q)} (1-q)^{-\gamma_1}$$

und

$$\left[P_2^{1\infty}(q^{1+\beta_2})(1-x q^{-1-\beta_2})\right](x=q^{\beta_2+1}) = (q^{\beta_2+1})^{-\gamma_1} \frac{\Pi(\beta_1-\beta_2-1, q)\qquad \Pi(-\gamma_2, q)}{\Pi(-\gamma_2-\beta_2-\alpha_1, q)\, \Pi(-\gamma_2-\beta_2-\alpha_2, q)} (1-q)^{-\gamma_1}.$$

Demnach können wir setzen:

$$\begin{cases} P_2^{-\beta_1} = (q^{\beta_1+1})^{-\gamma_2} \dfrac{\Pi(-\gamma_1, q)}{\Pi(-\gamma_1-\beta_1-\alpha_1, q)\ \Pi(-\gamma_1-\beta_1-\alpha_2, q)} (1-q)^{-\gamma_2} P_2^{1\infty} - (q^{\beta_1+1})^{-\gamma_1} \dfrac{\Pi(-\gamma_2, q)}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_1, q)} \dfrac{(1-q)^{-\gamma_1}}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_2, q)} P_2^{2\infty}. \\ P_2^{-\beta_2} = (q^{\beta_2+1})^{-\gamma_2} \dfrac{\Pi(-\gamma_1, q)}{\Pi(-\gamma_1-\beta_2-\alpha_1, q)} \dfrac{(1-q)^{-\gamma_2}}{\Pi(-\gamma_1-\beta_2-\alpha_2, q)} P_2^{1\infty} - (q^{\beta_2+1})^{-\gamma_1} \dfrac{\Pi(-\gamma_2, q)}{\Pi(-\gamma_2-\beta_2-\alpha_1, q)} \dfrac{(1-q)^{-\gamma_1}}{\Pi(-\gamma_2-\beta_2-\alpha_2, q)} P_2^{2\infty}. \end{cases}$$

Es bleibt jetzt noch übrig für die Grössen $P_2^{-\alpha_1}$, $P_2^{-\alpha_2}$ Ausdrücke zu finden. $P_2^{-\alpha_1}$ soll die Eigenschaft haben in der conjugirten Punktfolge $P^{-\alpha_1}$ unendlich klein von der 1. Ordnung und in den conjugirten Punktfolgen q^{β_1}, q^{β_2} unendlich gross von der 1. Ordnung zu werden, sonst aber ausser für $x = \infty$ überall eindeutig und endlich zu bleiben, d. h. mit $\dfrac{\pi(\beta_1 q, x)}{\pi(-\alpha_1 q, x)}$ multiplicirt nur in der conjugirten Punktfolge q^{β_2} unendlich gross von der 1. Ordnung zu werden, sonst aber ausser für $x = \infty$ überall endlich zu bleiben.

Da nun:

$$P_2\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix} q, x\Big) = \frac{\pi(\ \beta_1, q, x)}{\pi(-\alpha_1, q, x)} P_2\begin{pmatrix}-\beta_1, & -\alpha_1, & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \alpha_1+\beta_1+\gamma_2\end{pmatrix} q, x\Big)$$

ist, so muss:

$$\frac{\pi(\ \beta_1, q, x)}{\pi(-\alpha_1, q, x)} \left\{ G_2 P_2^{1\infty}\begin{pmatrix}-\beta_1, & -\alpha_1, & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \alpha_1+\beta_1+\gamma_2\end{pmatrix} q, x\Big) - G_1 P_2^{2\infty}\begin{pmatrix}-\beta_1, & -\alpha_1, & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \alpha_1+\beta_1+\gamma_2\end{pmatrix} q, x\Big) \right.$$

nach den in Art. 3 erläuterten Principien die Eigenschaften von $P_2^{-\alpha_1}$ haben, wenn y, und y_2 so bestimmt werden, dass der in Klammern stehende Ausdruck für $x = q^{+\alpha_1-1}$ nicht unendlich wird. Dann ist noch Formel 8:

$$G_2 = (q^{-\alpha_1+1})^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2} \frac{\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1, q)}{\Pi(-\gamma_1, q)} \frac{(1-q)^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2}}{\Pi(-\gamma_1-\beta_1-\alpha_2, q)}$$

$$G_1 = (q^{-\alpha_1+1})^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1} \frac{\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2, q)}{\Pi(-\gamma_2, q)} \frac{(1-q)^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_2, q)},$$

also:

$$\begin{cases} P_2^{-\alpha_1} = (q^{-\alpha_1+1})^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2} \dfrac{\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1, q)}{\Pi(-\gamma_1, q)} \dfrac{(1-q)^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2}}{\Pi(-\gamma_1-\beta_1-\alpha_2, q)} P_2^{1\infty} - (q^{-\alpha_1+1})^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1} \dfrac{\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2, q)}{\Pi(-\gamma_2, q)} \dfrac{(1-q)^{-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_2)} P_2^{2\infty}. \\ P_2^{-\alpha_2} = (q^{-\alpha_2+1})^{-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2} \dfrac{\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1, q)}{\Pi(-\gamma_1, q)} \dfrac{(1-q)^{-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2}}{\Pi(-\gamma_1-\beta_1-\alpha_1, q)} P_2^{1\infty} - (q^{-\alpha_2+1})^{-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1} \dfrac{\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2, q)}{\Pi(-\gamma_2, q)} \dfrac{(1-q)^{-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1}}{\Pi(-\gamma_2-\beta_1-\alpha_1)} P_2^{2\infty}. \end{cases}$$

Art. 9.

In diesem Art. sollen die linearen Relationen aufgestellt werden, durch welche die in der Umgebung des Punktes $x = o$ und die in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ gültigen Zweige verbunden sind:

Substituiren wir in den Gleichungen

$$1) \begin{cases} y_{10} = k_{10}^{1\infty}\ x^{-\gamma_1}\ F_3(\gamma_1) + k_{10}^{2\infty}\ x^{-\gamma_2}\ F_3(\gamma_2) \\ y_{20} = k_{20}^{2\infty}\ x^{-\gamma_1}\ F_3(\gamma_1) + k_{20}^{2\infty}\ x^{-\gamma_2}\ F_3(\gamma_2) \end{cases}$$

x statt $(x\,q^m)$, und beachten die Zerlegung:

$$P_2^{10}(xq^m)=(-1)^{-\gamma_1}\frac{(xq^m)^{-\gamma_1}\,q^{(\gamma_1+\alpha_1)-\gamma_1}}{\sigma(-\gamma_1,q,q^{\gamma_1+\alpha_1})}\overset{q^{-m}}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_2}\frac{p(\alpha_1,q,uq)\,p(\alpha_2,q,uq^{1+\alpha_2-\alpha_1})}{p(1-\gamma_1-\beta_1,q,uq^{\beta_1+\gamma_1+\alpha_1})\,p(1-\gamma_1-\beta_2,q,uq^{\beta_2+\gamma_1+\alpha_2})}\,p\left(-\gamma_1,\frac{q^{1-\alpha_1}}{xuq^m}\right)\frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$+(q^{-m})^{\gamma_2}\overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_2}\frac{p(\alpha_1,q,uq\cdot q^{-m})\,p(\alpha_2,q,uq^{1+\alpha_2-\alpha_1}\cdot q^{-m})}{p(1-\gamma_1-\beta_1,q,uq^{\beta_1+\gamma_1+\alpha_1}\,q^{-m})\,p(1-\gamma_1-\beta_2,q,uq^{\beta_2+\gamma_1+\alpha_2}\cdot q^{-m})}\,p(-\gamma_1,q,uxq^{\gamma_1+\alpha_1})\frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

$$\lim_{m=(-\infty)}\left[P_2^{10}(xq^m)\right]=\lim_{m=(-\infty)}\left[(xq^m)^{-\gamma_1}\right]\frac{(-1)^{\gamma_1}\,q^{-(\gamma_1+\alpha_1)\gamma_1}\,(1-q)^{\gamma_1-\gamma_2}}{\sigma(-\gamma_1,q,xq^{\gamma_1-\gamma_1})}\;\frac{\Pi(\gamma_2-\gamma_1-1,q)\,\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_1,q)\,\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2,q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_1,q)\,\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)}$$

$$+\lim_{m=-\infty}(q^{-m})^{\gamma_2}(-1)^{\gamma_2}\frac{\Pi(\gamma_2-1,q)\,\Pi(\gamma_1-\gamma_2-1,q)}{\Pi(\gamma_1-1,q)}\,\sigma(\gamma_2,q,xq^{-\alpha_1})\,q^{\gamma_1\gamma_2}\;,$$

so folgt aus dem Grenzübergang $m=-\infty$, bei dem die Summe der Coefficienten gleicher Potenzen von q^m Null werden muss, dass:

$$2)\quad\begin{cases} k_{10}^{1\infty}=\dfrac{(-1)^{-\gamma_1}(1-q)^{-\gamma_2}\,q^{-(\gamma_1+\alpha_1)\gamma_1}}{\sigma(-\gamma_1,q,xq^{\gamma_1+\alpha_1})}\;\dfrac{\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2,q)\,\Pi(-\alpha_2-\beta_2,q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_1,q)\,\Pi(-\gamma_1,q)}\\[2ex] k_{20}^{2\infty}=\dfrac{(-1)^{-\gamma_2}(1-q)^{-\gamma_1}\,q^{-(\gamma_1+\alpha_1)\gamma_2}}{\sigma(-\gamma_2,q,xq^{\gamma_2+\alpha_1})}\;\dfrac{\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2,q)\,\Pi(-\alpha_1-\beta_2,q)}{\Pi(-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2,q)\,\Pi(-\gamma_2,q)}\end{cases}$$

sein muss, woraus $k_{20}^{1\infty}$, $k_{20}^{2\infty}$ durch Vertauschung von α_1 und α_2 hervorgehen.

Werden jetzt in den Gleichungen *1* statt y_{10}, y_{20} die Reihen, statt $F_3(\gamma_1)$ $F_3(\gamma_2)$ die Summen genommen, so soll wieder die Substitution $x^-=xq^m$ gemacht werden, aber dann zur Grenze $m=\infty$ übergegangen werden. Nun ist aber:

$$3)\quad\begin{cases} P_2^{2\infty}(xq^m)=\left(\dfrac{1}{xq^m}\right)^{\gamma_1-1}\dfrac{\sigma\left(1-\beta_1-\gamma_1,q,\dfrac{q^{1+\beta_1}}{x}\right)\sigma\left(1-\beta_2-\gamma_2,q,\dfrac{q^{1+\beta_2}}{x}\right)}{\sigma\left(\alpha_1,q,\dfrac{q^{2-\gamma_1-\alpha_1}}{x}\right)\sigma\left(\alpha_2,q,\dfrac{q^{2+\gamma_1+\alpha_1}}{x}\right)}\;\dfrac{(q^{2-\gamma_1-\alpha_1})^{\alpha_1}\cdot q^{(2-\gamma_1-\alpha_2)\alpha_2}}{(q^{(1-\beta_1-\gamma_1)(1+\beta_1)}\cdot q^{(1-\beta_1-\gamma_2)(1+\beta_2)}}\\[2ex] \cdot\overset{q^m}{\underset{1}{S}}\dfrac{p\left(\alpha_1,q,\dfrac{xq^{-1+\gamma_1}}{u}q^m\right)p\left(\alpha_2,q,\dfrac{xq^{-1+\gamma_2}}{u}q^m\right)}{p\left(1-\beta_1-\gamma_1,q,\dfrac{xq^{-1+\gamma_1}}{u}q^m\right)p\left(1-\beta_2-\gamma_2,q,\dfrac{xq^{-1+\gamma_2}}{u}q^m\right)}\,u^{\gamma_1-1}\,p(-\gamma_1,q,uq)\dfrac{\Delta u}{u(1-q)}\end{cases}$$

$$+(x^{-\gamma_2})\overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_2}\frac{p\left(\alpha_1,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_1-\alpha_1}\right)p\left(\alpha_2,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_2}\right)}{p\left(1-\beta_1-\gamma_1,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_1}\right)p\left(1-\beta_2-\gamma_1,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_2}\right)}\,p(-\gamma_1,q,uq^{1+m})\frac{\Delta u}{u(q-1)}$$

wo der erste Theil für $m=\infty$ verschwindet. Wird jetzt im Gleichungssystem *1* die Summe der Coefficienten gleicher Potenzen von q^m gleich *o* gesetzt, so erhalten wir zwei Gleichungen, welche nach $\left[P_2^{2\infty}\,x\,q^m\right]_{m=\infty}\left[P_2^{1\infty}(x\,q^m)\right]_{m=\infty}$ aufgelöst folgende Werthe geben:

$$x^{-\gamma_2}\overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}}u^{\gamma_2}\frac{p\left(\alpha_1,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_1-\alpha_1}\right)p\left(\alpha_2,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_1-\alpha_2}\right)}{p\left(1-\beta_1-\gamma_1,q,\frac{u}{x}q^{-1+\beta_1}\right)p\left(1-\beta_2-\gamma_1,q,\frac{u}{x}q^{-1+\beta_2}\right)}\frac{\Delta u}{u(q-1)}=\frac{\Pi(\gamma_2-1,q)\,\Pi(-\gamma_1,q)}{\Pi(\gamma_2-\gamma_1,q)}\,\frac{1}{D}\;.$$

$$\Big[\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)\,(1-q)^{-\gamma_1}\,k_{20}^{1\infty}\;F(\gamma_2,\beta_1+\gamma_2+\alpha_1,1-\beta_2-\alpha_2,q^{\alpha_1+\beta_2+\gamma_1})$$

$$-\,\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1)\quad(1-q)^{-\gamma_1}\,k_{10}^{1\infty}\;F(\gamma_2,\beta_1+\gamma_2+\alpha_2,1-\beta_2-\alpha_1,q^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_1})\Big]$$

$$x^{-\gamma_1}\overset{\infty}{\underset{1}{S}} u^{\gamma_1}\frac{p(\alpha_1,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_2+\alpha_1})\,p(\alpha_2,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_2-\alpha_2})}{p(1-\beta_1-\gamma_2,q,\frac{u}{x}q^{-1+\beta_1})\,p(1-\beta_2-\gamma_2,q,\frac{u}{x}q^{-1+\beta_2})}\frac{\Delta u}{u(q-1)}=\frac{\Pi(\gamma_1-1,q)\,\Pi(-\gamma_2,q)}{\Pi(\gamma_1-\gamma_2,q)}\frac{1}{D}.$$

$$\Big[\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)(1-q)^{-\gamma_1}\,k_{20}^{2\infty}\,F(\gamma_2,\beta_1+\gamma_2+\alpha_1,1-\beta_2-\alpha_2,q^{\alpha_1+\beta_2+\gamma_1})$$
$$-\Pi(-\alpha_1-\beta_2-\gamma_1)\quad(1-q)^{-\gamma_2}\,k_{10}^{2\infty}\,F(\gamma_2,\beta_1+\gamma_2+\alpha_2,1-\beta_2-\alpha_1,q^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_1})\Big],$$

In diesen Gleichungen bedeutet D die Grösse:

$$\begin{vmatrix} k_{1\infty}^{10} & k_{10}^{2\infty} \\ k_{1\infty}^{20} & k_{20}^{2\infty}\end{vmatrix}=(-1)^{-(\gamma_1+\gamma_2)}(-q)^{-(\gamma_1+\gamma_2)}\frac{\Pi(\alpha_2-\beta_2,q)\,\Pi(\alpha_1-\beta_2,q)}{\Pi(-\gamma_1,q)\,\Pi(-\gamma_2,q)}\frac{\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_2,q)\,\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1,q)\,\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_2,q)\,\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)}{\Pi(\gamma_1-\gamma_2,q)\,\Pi(\gamma_2-\gamma_1-1,q)\,\Pi(\alpha_1-\alpha_2,q)\,\Pi(\alpha_2-\alpha_1-1,q)}$$
$$\frac{\sigma(-\beta_1,q,x)\,\sigma(-\beta_2,q,x)}{\sigma(\alpha_1,q,x)\,\sigma(\alpha_2,q,x)}.$$

Um in den Gleichungen:

$$4)\quad\begin{aligned} x^{-\gamma_1}\,F_3(\gamma_1)&=k_{1\infty}^{10}\,y_{10}+k_{1\infty}^{20}\,y_{20}\\ x^{-\gamma_2}\,F_3(\gamma_2)&=k_{2\infty}^{10}\,y_{10}+k_{2\infty}^{20}\,y_{20}\end{aligned}$$

die Coefficienten zu berechnen, nehmen wir für $F_3\,\gamma_1$ die entsprechende Reihe, für $y_{10}\,y_{20}$ ihre Darstellungen durch bestimmte Summen, setzen statt x $x\,q^m$ und gehen zur Grenze $m=-\infty$ über. Dann ist wie in den früheren Fällen:

$$o=k_{1\infty}^{10}\,k_{10}^{2\infty}+k_{1\infty}^{20}\,k_{20}^{2\infty}.$$

Demnach muss:

$$k_{1\infty}^{10}=C.\,k_{20}^{2\infty};\quad k_{1\infty}^{20}=-C.\,k_{10}^{2\infty}$$

sein. Der gemeinsame noch unbestimmte Faktor wird dadurch berechnet, dass in der 1. Gleichung 4 statt $F_3(\gamma_1)$ die bestimmte Summen, statt $y_{10}\,y_{20}$ die Reihen genommen werden, x statt $x\,q^m$ substituirt und $m=\infty$ gesetzt wird.

Dann ist:

$$\frac{\Pi(\gamma_1-\gamma_2,q)(x)^{-\gamma_1}}{\Pi(-\gamma_2,q)\,\Pi(\gamma_1-1,q)}\overset{\infty}{\underset{1}{S}} u^{\gamma_1}\frac{p(\alpha_1,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_1-\alpha_1})\,p(\alpha_2,q,\frac{u}{x}q^{2-\gamma_1-\alpha_2})}{p(1-\beta_1-\gamma_1,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_1})\,p(1-\beta_2-\gamma_2,q,\frac{u}{x}q^{1+\beta_2})}\frac{\Delta u}{u(q-1)}$$
$$=C\Big[k_{20}^{2\infty}\,\Pi(-\alpha_2-\beta_1-\gamma_1,q)\,(1-q)^{-\gamma_1}\,F(\gamma_2,\beta_1+\gamma_2+\alpha_1,1-\beta_2-\alpha_2,q^{\alpha_1+\beta_2+\gamma_1})$$
$$-k_{10}^{2\infty}\,\Pi(-\alpha_1-\beta_1-\gamma_1,q)\,(1-q)^{-\gamma_1}\,F(\gamma_2,\beta_1+\gamma_2+\alpha_2,1-\beta_2-\alpha_1,q^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_1})\Big]$$

also nach den oben gefundenen Ausdrücken:

$$C=\frac{1}{D}.$$

$$5.\quad\begin{cases} k_{1\infty}^{10}=\dfrac{k_{20}^{2\infty}}{D}\\ k_{1\infty}^{20}=-\dfrac{k_{10}^{2\infty}}{D}\\ k_{2\infty}^{10}=\dfrac{k_{10}^{1\infty}}{D}\\ k_{2\infty}^{20}=\dfrac{k_{20}^{1\infty}}{D}.\end{cases}$$

Diese Grössen hätten direct aus den Gleichungen 1 berechnet werden können. Sie sind selbstständig entwickelt worden als ein Beispiel zu den in Art. 6 angegebenen Methoden. Obgleich nun diese Relationen unter der Voraussetzung gefunden sind, dass die bestimmten Summen convergiren, so gelten sie doch allgemein in Folge des Princips, dass eine Funktion nur auf eine Weise als Funktion einer complexen Variabeln stetig fortgesetzt werden kann.

Art. 10.*)

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}^{10}, \mathfrak{P}^{20}, \mathfrak{P}^{\beta_1}, \mathfrak{P}^{\beta_2}, \mathfrak{P}^{\alpha_1}, \mathfrak{P}^{\alpha_2}, \mathfrak{P}^{1\infty}, \mathfrak{P}^{2\infty}$ Grössen, die sich von den entsprechenden Funktionen $P_2^{10}, P_2^{20}, P_2^{+\beta_1}, P_2^{+\beta_2}, P_2^{+\alpha_1}, P_2^{+\alpha_2}, P_2^{1\infty}, P_2^{2\infty}$ nur durch constante, einstweilen noch nicht bekannte Faktoren unterscheiden. Ferner soll:

$$\mathfrak{P}^{10} = \mathfrak{P}^{\alpha_1} = \binom{\beta_1}{10} \mathfrak{P}^{\beta_1} + \binom{\beta_2}{10} \mathfrak{P}^{\beta_2} = \binom{1\infty}{10} \mathfrak{P}^{1\infty} + \binom{2\infty}{2\infty} \mathfrak{P}^{2\infty}$$

$$\mathfrak{P}^{20} = \mathfrak{P}^{\alpha_2} = \binom{\beta_1}{20} \mathfrak{P}^{\beta_1} + \binom{\beta_2}{20} \mathfrak{P}^{\beta_2} = \binom{1\infty}{20} \mathfrak{P}^{1\infty} + \binom{2\infty}{20} \mathfrak{P}^{2\infty}$$

gesetzt werden. Dann erhalten wir in Folge der Formeln 7 Art. 7 und Art. 8:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\binom{1\infty}{10}}{\binom{1\infty}{20}} : \frac{\binom{\beta^1}{10}}{\binom{\beta^1}{20}} &= \frac{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_1+\beta_1+\gamma_2}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{+\alpha_1+\beta_2-1}{2}\, l g q\right)}{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_2+\beta_1+\gamma_2}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{+\alpha_2+\beta_2-1}{2}\, l g q\right)} \frac{\sigma(\gamma_1, q, x q^{-\alpha_1})}{\sigma(\gamma_1, q, x q^{-\alpha_2})} \cdot q^{\gamma_1(\alpha_1-\alpha_2)}. \\
\frac{\binom{1\infty}{10}}{\binom{1\infty}{20}} : \frac{\binom{\beta^1}{10}}{\binom{\beta^2}{20}} &= \frac{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_1+\beta_2+\gamma_2}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{2}\, l g q\right)}{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_2+\beta_1-1}{2}\, l g q\right)} \frac{\sigma(\gamma_1, q, x q^{-\alpha_1})}{\sigma(\gamma_1, q, x q^{\alpha_2})} \cdot q^{\gamma_1(\alpha_1-\alpha_2)}. \\
\frac{\binom{2\infty}{10}}{\binom{2\infty}{20}} : \frac{\binom{\beta^1}{10}}{\binom{\beta^1}{20}} &= \frac{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_1+\beta_2-1}{2}\, l g q\right)}{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_2+\beta_1+\gamma_2}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_2+\beta_2-1}{2}\, l g q\right)} \frac{\sigma(\gamma_2, q, x q^{-\alpha_1})}{\sigma(\gamma_2, q, x q^{-\alpha_2})} \cdot q^{\gamma_2(\alpha_1-\alpha_2)}. \\
\frac{\binom{2\infty}{10}}{\binom{2\infty}{20}} : \frac{\binom{\beta^2}{10}}{\binom{\beta^2}{20}} &= \frac{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_1+\beta_2+\gamma_1}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{2}\, l g q\right)}{\theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}{2}\, l g q\right) \theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha_2+\beta_1-1}{2}\, l g q\right)} \frac{\sigma(\gamma_2, q, x q^{-\alpha_1})}{\sigma(\gamma_2, q, x q^{-\alpha_2})} \cdot q^{\gamma_2(\alpha_1-\alpha_2)}.
\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Die Gleichheit der beiden sich aus diesen Gleichungen für jedes der beiden Verhältnisse: $\frac{\binom{1\infty}{10}}{\binom{2\infty}{10}} : \frac{\binom{1\infty}{20}}{\binom{2\infty}{20}}; \frac{\binom{\beta^1}{10}}{\binom{\beta^1}{20}} : \frac{\binom{\beta^2}{10}}{\binom{\beta^2}{20}}$ erhellt als eine Folge der Gleichungen:

$$\theta_{\prime\prime}\left(\frac{1-\alpha}{2}\, l g q\right) q^{\frac{1-\alpha}{2}} = \theta_{\prime\prime}\left(\frac{\alpha}{2}\, l g q\right) q^{\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

Demnach sind von den Grössen $\frac{\binom{1\infty}{10}}{\binom{2\infty}{10}}, \frac{\binom{1\infty}{20}}{\binom{2\infty}{20}}, \frac{\binom{\beta_1}{10}}{\binom{\beta_2}{10}}, \frac{\binom{\beta_1}{20}}{\binom{\beta_2}{10}}$ durch eine von ihnen z. B. durch $\frac{\binom{1\infty}{10}}{\binom{2\infty}{10}}$ die übrigen bestimmt, und die drei Grössen $\binom{2\infty}{20}\binom{\beta_1}{20}\binom{\beta_2}{20}$ durch die 5 Grössen $\binom{1\infty}{10}$ $\binom{2\infty}{10}$ $\binom{1\infty}{20}$ $\binom{\beta^1}{10}$ $\binom{\beta^2}{20}$, welche von den Verhältnissen der willkürlichen Constanten in $\mathfrak{P}^{10}, \mathfrak{P}^{20}, \mathfrak{P}^{\beta_1}, \mathfrak{P}^{\beta_2}, \mathfrak{P}^{1\infty}, \mathfrak{P}^{2\infty}$ (abhängen), also den Grössen:

$$\frac{\mathfrak{P}^{10}}{P_2^{10}} : \frac{\mathfrak{P}^{20}}{P_2^{20}} : \frac{\mathfrak{P}^{\beta_1}}{P_2^{+\beta_1}} : \frac{\mathfrak{P}^{\beta_2}}{P_2^{+\beta_2}} : \frac{\mathfrak{P}^{1\infty}}{P_2^{1\infty}} : \frac{\mathfrak{P}^{2\infty}}{P_2^{2\infty}}$$

und durch geeignete Bestimmung jedwede Worte annehmen können.

---

*) *Riemann:* Abhandlung der Societät der Wissenschaft zu Göttingen 1857.
Thomae: Cr. J. 70 pag. 274. Cr. J. 84.

Sind nun in den Funktionen:

$$P = P\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & q\,x\end{pmatrix};\quad P_1 = P\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \beta_1^1 & \gamma_1^1 & \\ \alpha_2^1 & \beta_2^1 & \gamma_2^1 & q\,x\end{pmatrix}$$

die entsprechenden Parameter um ganze Zahlen verschieden, in welchem Falle sie contigue Funktionen heissen sollen und ist $\overline{\alpha_1}$ die kleinere der Zahlen $\alpha_1\,\alpha_1{}^1$; $\overline{\alpha_2}$ die kleinere der Zahlen $\alpha_2\,\alpha_2{}^1$; $\overline{\beta_1}$ die kleinere der Zahlen $\beta_1{}^1\,\beta_1$; $\overline{\beta_2}$ die kleinere der Zahlen $\beta_2\,\beta_2{}^1$ und ebenso $\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}$ bez. die kleinere von γ_1, γ_2 und $\gamma_1{}^1, \gamma_2{}^1$, so kann man die 8 Grössen $\binom{1\infty}{10}, \binom{2\infty}{10}, \binom{1\infty}{20}, \binom{2\infty}{10}, \binom{\beta_1}{10}, \binom{\beta_2}{10}, \binom{\beta_1}{20}, \binom{\beta_2}{10}$ den 8 Grössen, wie sie für die Funktion P^1 bestehen, gleich annehmen, da die Gleichungen *1* nach Satz q der Einleitung ungeändert bleiben, und daher aus der Gleichheit der fünf willkürlichen die Gleichheit der drei übrigen folgt. Daher ist:

$$\left\{\begin{aligned}
&(\mathfrak{P}^{10}\,\mathfrak{P}_1^{20} - \mathfrak{P}^{20}\,\mathfrak{P}_1^{10})\,\frac{p(-\overline{\beta_1}, q, x)\,p(-\overline{\beta_2}, q, x)}{p(+\overline{\alpha_1}, q, x)\,p(\overline{\alpha_2}, q, x)} \\
&= \left|\frac{\binom{\beta^1}{10}\binom{\beta^2}{10}}{\binom{\beta^1}{20}\binom{\beta^2}{20}}\right|\,(\mathfrak{P}^{\beta_1}\,\mathfrak{P}_1^{\beta_2} - \mathfrak{P}_1^{\beta_1}\,\mathfrak{P}^{\beta_2})\,\frac{p(-\overline{\beta_1}, q, x)\,p(-\overline{\beta_2}, q, x)}{p(\overline{\alpha_1}, q, x)\,p(\overline{\alpha_2}, q, x)} \\
&= \left|\frac{\binom{1\infty}{10}\binom{2\infty}{10}}{\binom{1\infty}{20}\binom{2\infty}{20}}\right|\,(\mathfrak{P}^{1\infty}\,\mathfrak{P}_1^{2\infty} - \mathfrak{P}_1^{1\infty}\,\mathfrak{P}^{2\infty})\,x^{\gamma_1+\gamma_2}\,\frac{\sigma(\overline{\alpha_1}, q, x)\,\sigma(\overline{\alpha_2}, q, x)}{\sigma(-\overline{\beta_1}, q, x)\,\sigma(-\overline{\beta_2}, q, x)}\,x^{-\overline{\beta_1}-\overline{\beta_2}-\overline{\alpha_1}-\overline{\alpha_2}-\overline{\gamma_1}-\overline{\gamma_2}} \\
&\qquad \frac{p\left(-\overline{\beta_1}, q, q\dfrac{1+\overline{\beta_1}}{x}\right)p\left(-\overline{\beta_2}, q, q\dfrac{1+\overline{\beta_2}}{x}\right)}{p\left(\overline{\alpha_1}, q, q\dfrac{1-\overline{\alpha_1}}{x}\right)p\left(\overline{\alpha_2}, q, q\dfrac{1-\overline{\alpha_2}}{x}\right)}
\end{aligned}\right.$$

eine allenthalben einändrige und für endliche x endliche Funktion und daher eine ganze Funktion vom Grade $-\overline{\beta_1} - \overline{\beta_2} - \overline{\alpha_1} - \overline{\alpha_2} - \overline{\gamma_1} - \overline{\gamma_2}$. (Die Grösse:

$$\begin{vmatrix}\binom{1\infty}{10} & \binom{2\infty}{10} \\ \binom{1\infty}{20} & \binom{2\infty}{10}\end{vmatrix} : \frac{\sigma(\alpha_1, q, x)\,\sigma(\alpha_2, q, x)}{\sigma(-\beta_1, q, x)\,\sigma(-\beta_2, q, x)} \text{ muss constant sein.}$$

Dies geht aus den Gleichungen 3 des vorigen Artikels hervor.)

Sind nun:

$$P = P_2\begin{pmatrix}\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \\ \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2\end{pmatrix}, q, x);\quad P_1 = P_2\begin{pmatrix}\alpha_1^1\,\beta_1^1\,\gamma_1^1 \\ \alpha_2^1\,\beta_2^1\,\gamma_2^1\end{pmatrix} q\,x);\quad P_2 = P_2\begin{pmatrix}\alpha_1^2\,\beta_1^2\,\gamma_1^2 \\ \alpha_2^2\,\beta_2^2\,\gamma_2^2\end{pmatrix} q\,x)$$

drei contigue Funktionen, so fliesst aus der eben bewiesenen Beziehung mittelst der identischen Gleichung:

$$\mathfrak{P}^{10}(\mathfrak{P}_1^{10}\,\mathfrak{P}_2^{20} - \mathfrak{P}_2^{10}\,\mathfrak{P}_1^{20}) + \mathfrak{P}_1^{10}(\mathfrak{P}_2^{10}\,\mathfrak{P}_1^{20} - \mathfrak{P}^{10}\,\mathfrak{P}_2^{20}) + \mathfrak{P}_2^{10}(\mathfrak{P}^{10}\,\mathfrak{P}_1^{20} - \mathfrak{P}^{20}\,\mathfrak{P}_1^{10}) = o$$

der Satz, dass zwischen ihren entsprechenden Gliedern eine lineare Gleichung stattfindet, deren Coefficienten ganze Funktionen von x sind, und dass also:

„Sämmtliche Funktionen P_2, also auch sämmtliche Reihen $F_3\left(a_{2-a-c-d,}\overset{b,}{}\overset{c\ d,}{e,}q, \frac{1}{x}\right)$, deren entsprechende Indicus sich um ganze Zahlen unterscheiden, sich durch zwei beliebige von ihnen linear mit rationalen Funktionen von x als Coefficienten ausdrücken lassen“.

Kiel, im July 1884.

E. Weinnoldt.

Lebenslauf.

Verfasser dieser Arbeit *Ernst Heinrich Friedrich Weinnoldt* wurde am 28. Oktober 1863 zu Kiel geboren, als der Sohn des früheren Gutsbesitzers *C. H. Weinnoldt* daselbst. Seine Vorbildung erhielt er auf der Realschule 2. Ord., jetzigen Oberrealschule seiner Vaterstadt und später auf dem Realgymnasium am Catharineum zu Lübeck, welches er Ostern 1880 mit dem Zeugniss der Reife verliess.

Die ersten drei Semester seiner Studienzeit brachte er auf der Universität Berlin, die übrige Zeit auf der Universität Kiel zu.

Während seiner Studien, die sich besonders auf Mathematik, Physik und Chemie, nebenbei auf Philosophie und beschreibende Naturwissenschaften erstreckten, besuchte er die Kurse, Vorlesungen und Praktika folgender Herren:

Bruns, Engler, Erdmann, Förster, Gabriel, Glan, Hertz, Helmholtz, Karsten, Krohn, Kummer, Ladenburg, Möbius, Neesen, Pochhammer, Rügheimer, Wangerin, Weierstrass, Weber, Zeller.

Allen diesen Herren, seinen verehrten Lehrern, spricht der Verfasser seinen Dank aus.

Thesen.

I.

Der von *Gauss* in seiner Doctordissertation (1799) gegebene Beweis für die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung ist wegen der grösseren Anschaulichkeit seinem in den Grundzügen übereinstimmenden Beweise vom Jahre 1849 vorzuziehen.

II.

Die Stellung der Elemente in der elektrischen Spannungsreihe hängt mit ihrer Stellung in der Reihe der Atomgewichte zusammen.

III.

Als Subject unseres inneren Lebens muss ein einheitliches immaterielles Wesen, die Seele, angenommen werden.

Druck von A. Hopfer in Burg.